

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTRIBUIÇÃO A ELABORAÇÃO DE UM SISTEMA TRIDI-
MENSIONAL DE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MA-
GNÉTICOS , UTILIZANDO A TÉCNICA DE ELEMENTOS
FINITOS.

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
EM ENGENHARIA.

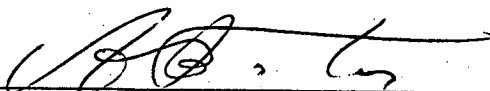
ADROALDO RAIZER

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 1987

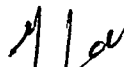
CONTRIBUIÇÃO A ELABORAÇÃO DE UM SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE
CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS UTILIZANDO A
TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS

Adroaldo Raizer

DISSERTAÇÃO JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E APROVADA EM SUA FOR
MA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat
Orientador

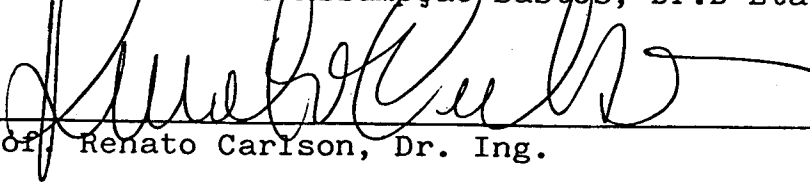


Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D. Sc.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

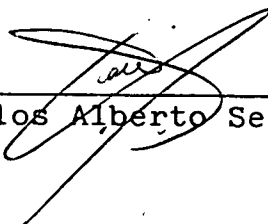
BANCA EXAMINADORA



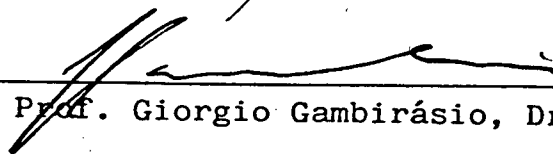
Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D'Etat



Prof. Renato Carlson, Dr. Ing.



Prof. Carlos Alberto Selke, Ph.D.



Prof. Giorgio Gambirásio, Dr. L.D.

A Deus

Aos meus Pais
Aos meus amigos
A Lagoa da Conceição

AGRADECIMENTOS

" Os homens têm complicado tanto o mecanismo da vida que já ninguém tem certeza de nada: para se fazer alguma coisa é preciso aliar a um impulso de aventura grandes sombras de dúvida. Não se acredita mais nem na existência de gente honesta; e os bons têm medo de exercitarem sua bondade, para não serem tratados de hipócritas ou de ingênuos.

Chegamos a um ponto em que a virtude é ridícula e os mais vis sentimentos se mascaram de grandiosidade , simpatia , benevolência...

Se prestarmos atenção ao que nos dizem sobre as coisas que nós mesmos presenciamos - ou temos que aceitar a mentira como a arte mais desenvolvida do nosso tempo , ou desconfiaremos do nosso próprio testemunho, e acabamos no hospício! ...

No tempo de Molière, quando um criado dava para pensar, atrapalhava tudo. Mas agora, além dos criados , pensam os patrões, as patroas, os amigos e inimigos de uns e de outros e todo o resto da massa humana. E não só pensam, como também pensam que pensam ! E além de pensarem que pensam, pensam que tem razão ! E cada um é o detentor exclusivo da razão !

Pois de tal abundância de razão é que se faz a loucura!"
*trecho do poema:Tempo Incerto, do livro Escolha seu sonho de Cecília Meireles.

Agradeço as pessoas honestas , sinceras e que não tem medo de exercitarem a bondade.

Agradeço ao professor João Pedro Assumpção Bastos ,pela compreensão, pela amizade, pela ajuda sempre constante no desenvolvimento deste trabalho, e pelo seus esforços para que se concretizasse mais um sonho meu.

Agradeço aos professores Ivo Barbi, Antônio José Alves Simões Costa , Augusto Bruciapaglia , pela ajuda direta ou indireta neste trabalho, e principalmente pela sua dedicação ao curso

ao curso de pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Agradeço aos componentes da banca examinadora, professores : Carlson , Selke , Gambirásio.

Cabe aqui um agradecimento muito especial ao professor Arnaldo José Perin; O cumprimento de mais esta etapa de minha vida se deve a sua amizade, seu incentivo, e seu apoio espiritual nos tempos incertos.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver um sistema informático para a análise e concepção de dispositivos eletromagnéticos complexos, em tres dimensões.

Faz parte deste trabalho a análise da formulação varia
cional descritiva dos sistemas físicos; a aplicação da técnica nu
mérica de elementos finitos isoparamétricos, bem como a âná
lise dos métodos de resolução, diretos e iterativos, do sistema de equa
ções lineares gerado pela aplicação desta técnica.

ABSTRACT

This work has the purpose of developing software for the design and analysis of complex electromagnetic devices in three dimensions.

It is concerned with the analysis of the variational formulation describing physical systems. Several solution methods are presented, first numerical technique of isoparametric finite elements, followed by the analysis of the direct and iterative solution methods of the linear equations generated by the application of this technique.

SUMÁRIO

RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
INTRODUÇÃO.....	xii
CAPÍTULO 1 - A FORMULAÇÃO VARIACIONAL	
1.1 - Introdução	01
1.2 - Os fundamentos do cálculo Variacional	01
1.2.1 - Conclusões da formulação variacional	06
1.3 - Os casos estudados	07
1.3.1 - Eletrostática	07
1.3.2 - Magnetostática	08
1.3.3 - Imãs Permanentes	08
1.4 - A minimização da funcional	10
CAPÍTULO 2 - A TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA	
2.1 - Introdução	15
2.2 - O elemento de referência e as funções de interpolação	15
2.3 - O elemento isoparamétrico	20
2.4 - A análise matemática linear	22
2.4.1 - O potencial escalar	23
2.4.2 - Os imãs permanentes	26
2.5 - As expressões matriciais	29
2.5.1 - As formas integrais sobre o elemento real	29
2.5.2 - A forma integral sobre o elemento referência	31
2.5.2.1 - A transformação das derivadas x, y, z	31
2.5.2.2 - A transformação do domínio de integração	32
2.5.3 - O cálculo do Jacobiano, de seu determinante, de sua inversa	34

2.6 - Exemplo de cálculo utilizando-se o elemento triangular	35
2.7 - A integração numérica	38
2.7.1 - Introdução	38
2.7.2 - O método de integração numérica de Gauss ...	38
2.7.3 - A integração numérica a três dimensões	43
2.8 - A organização do cálculo das matrizes elementares por integração numérica	45
2.9 - Conclusão	46
CAPÍTULO 3 - MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES .	
3.1 - Introdução	47
3.2 - As técnicas de armazenamento das matrizes	49
3.2.1 - A Matriz Banda	51
3.2.2 - A matriz compacta	53
3.3 - As condições de contorno	56
3.4 - Os métodos de resolução de sistemas de equações lineares	58
3.4.1 - Os métodos diretos	61
3.4.1.1 - O método de eliminação de Gauss	61
3.4.1.2 - O método de Choleski	63
3.4.2 - Os métodos iterativos	67
3.4.2.1 - O método da sobre-relaxação	68
3.4.2.2 - O método dos gradientes conjugados ..	70
3.4.2.3 - O método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Choleski (ICCG)...	71
3.5 - Testes sobre as performances dos métodos	76
3.5.1 - Os casos abordados	77
3.5.2 - Resultados obtidos	85
3.6 - Conclusão	95

CAPÍTULO 4 - O SISTEMA INFORMÁTICO SCAD-3D	
4.1 - Introdução	96
4.2 - O programa MEF-3D	98
4.3 - O programa CEF-3D	101
4.4 - O programa GEF-3D	109
4.5 - Exemplos de utilização do sistema SCAD-3D	110
4.5.1 - Determinação de campos elétricos no interior de um auto-transformador de 200 MVA	111
4.5.1.1 - Introdução	111
4.5.1.2 - Espectro de probabilidade das causas de falha	112
4.5.1.3 - Definição da região de estudos	113
4.5.1.4 - A equação descritiva dos fenômenos físicos	115
4.5.1.5 - O sistema informático SCAD-3D	115
4.5.1.6 - Os resultados obtidos do cálculo	122
4.5.1.7 - Conclusão	123
4.5.2 - Estudo de um servo-motor com imãs-permanen - tes por um método de elementos finitos	124
4.5.2.1 - Introdução	124
4.5.2.2 - Descrição da máquina	125
4.5.2.3 - A modelização da máquina	125
4.5.2.4 - Resultados obtidos .x.....	126
4.5.2.5 - Conclusão	127
4.5.2.6 - Figuras do sistema SCAD-3D	131
4.5.3 -Estrutura hipotética	136
4.6 - Conclusões	140
CONCLUSÃO GERAL	141
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	143

INTRODUÇÃO

Na atual fase do desenvolvimento tecnológico Brasileiro, existe uma preocupação muito grande, por parte de indústrias e grupos de pesquisa aplicada, em colocar no mercado produtos que possam concorrer internacionalmente com produtos similares; para tornar este produto competitivo, existe a necessidade de otimizá-lo a fim de melhorar sua performance e diminuir os custos de seu desenvolvimento pela fabricação do menor número possível de protótipos. Na área de dispositivos eletromagnéticos (máquinas elétricas, válvulas, servomotores, transformadores, etc...) , é necessário para tanto fazer um estudo criterioso dos campos elétricos e/ou magnéticos nestes dispositivos.

Tais cálculos, em estruturas complexas , não são passíveis de resolução analítica; portanto, os cálculos de campos elétricos e magnéticos, devem ser feitos numericamente, através de técnicas numéricas, como a de diferenças finitas ou elementos finitos. Dispondo destas técnicas, é possível construir um sistema confiável de análise e concepção de dispositivos eletromagnéticos.

A maior parte dos problemas desta natureza em engenharia elétrica, podem ser tratados bidimensionalmente. Porém existem estruturas complexas, em que a análise deve ser feita em tres dimensões.

Existe no grupo de cálculo de campos, um sistema informático tridimensional, sobre o qual nos propusemos, a aprimorar, entre outros aspectos, a técnica de elementos finitos utilizada.

A técnica estudada é muito versátil, e apesar do estudo ser de ordem tridimensional, ela pode ser particularizada para estudos uni e bidimensionais, como veremos no escopo desta tese.

A técnica desenvolvida, está ligada aos elementos fi

nitos isoparamétricos de 1ª ordem. Para efetuarmos este trabalho vários outros aspectos foram abordados, como o problema da integração numérica.

A aplicação da técnica de elementos finitos, gera um sistema matricial, de proporções grandes, e que deve ser resolvido, para que tenhamos a solução desejada. Nos últimos anos, passou-se a utilizar métodos iterativos de resolução de sistemas de equações lineares, devido ao fato de termos sistemas muito grandes a serem resolvidos.

Os métodos iterativos propiciam uma melhor utilização da memória do computador, possibilitando então, aumentarmos o domínio de cálculo, ou seja, o número de nós do problema a ser tratado.

Os métodos diretos (Gauss ou Choleski) são reconhecidamente eficazes, pois nos levam por um processo direto a solução exata de um sistema matricial; o inconveniente dos mesmos deve-se ao fato, que há necessidade de ocupação de área de memória mais intensa do computador.

Para nós no entanto, não havia certeza que os métodos iterativos, a priori mais atraentes, seriam eficazes em todas as situações frequentes de cálculo de campos elétricos e magnéticos por elementos finitos.

Com o surgimento de técnicas de pré-condicionamento matricial, os estudos dos métodos iterativos se intensificaram.

Uma parcela substancial do trabalho aqui apresentado constituiu a estudar duas variantes do método ICCG, junto com os já conhecidos (sobrerelaxação, gradientes conjugados). Foi então feita a aplicação destes métodos a várias estruturas tanto 2-D, como 3-D, que geram diferentes sistemas matriciais, e pudemos então concluir sobre a validade de empregá-los sistematicamente nos nossos sistemas de cálculo.

Com a grande impulsão que teve nos últimos 10 anos o setor da informática e sobretudo na área de micro-computadores e micro-controladores, houve uma demanda sempre crescente por parte das indústrias e grupos de pesquisas, por este tipo de equipamento.

Efetivamente, notou-se que com uma produção em escala industrial e com preços acessíveis, empresários de pequeno e médio porte puderam também, beneficiar-se da compra de tais equipamentos e em consequência, dotados de instrumentos precisos, puderam trabalhar com um nível mais alto de tecnologia.

Com esta idéia em mente, foi objetivo deste trabalho, a criação de um sistema informático, que pudesse fazer a análise e concepção de dispositivos eletromagnéticos tridimensionais em micro-computadores de 16 bits, para que pudessemos contar com uma ferramenta precisa, implementável nos mais diferentes meios industriais e de pesquisa.

O sistema desenvolvido tem tres segmentos bem distintos que são; um sistema pré-processador, responsável pela captação dos dados geométricos e físicos de um dispositivo qualquer; um sistema processador que realiza o cálculo de campos elétricos e magnéticos através da técnica de elementos finitos; e um sistema pós processador, responsável pela obtenção dos resultados numéricos e/ou gráficos.

O sistema é iterativo, gráfico-conversacional, o que possibilita uma fácil utilização.

No final deste trabalho, foram testados alguns exemplos, como o cálculo de campos elétricos no interior de um autotransformador de 200 MVA, o cálculo de campos magnéticos num servomotor a imãs permanentes, etc...

Os resultados obtidos demonstram que o sistema informático obtido é de grande aplicabilidade e eficiência nos casos que ele se propõe a resolver.

CAPÍTULO 1

A FORMULAÇÃO VARIACIONAL

1.1. Introdução

Neste capítulo, faremos a análise matemática, que está ligada à técnica dos elementos finitos.

Primeiramente faremos a introdução da formulação variacional. Dentro desta formulação, ao invés de resolvermos diretamente as equações discretizadas do sistema físico, nos minimizaremos uma certa funcional, convenientemente definida para o nosso domínio de estudo. Esta análise matemática, está ligada diretamente às equações diferenciais parciais que regem os sistemas físicos que serão objeto deste trabalho.

Através desta formulação, seremos capazes de verificar como deve ser a distribuição de campos, tanto magnético como elétrico, em dispositivos eletromagnéticos.

Ainda neste capítulo faremos o desenvolvimento matemático das equações de Maxwell, ligadas a eletrostática, magnetostática e o equacionamento dos ímãs-permanentes, que vem tendo um destaque muito grande na atualidade, devido as suas diversas aplicações em dispositivos eletromagnéticos; equações estas, que serão posteriormente tratadas pela técnica de elementos finitos.

1.2. Fundamentos do cálculo variacional

O princípio da formulação variacional consiste em minimizar uma certa funcional energética, ao invés de resolvermos diretamente as equações que descrevem o fenômeno físico, no domínio de estudo.

Consideremos uma função $V(x,y,z)$ e uma funcional F , que é uma função de V e de suas derivadas parciais, sobre um domínio D de fronteira S . Como descrito na expressão abaixo:

$$F = \int_D F(V, V_x', V_y', V_z') dD \quad (1.1)$$

Para que esta funcional F seja estacionária no seu ponto de energia mínima, a toda variação δV , $\delta V_x'$, $\delta V_y'$, $\delta V_z'$, a variação correspondente δF , tem que ser igual a zero, conforme a figura esquemática 1.1. abaixo:

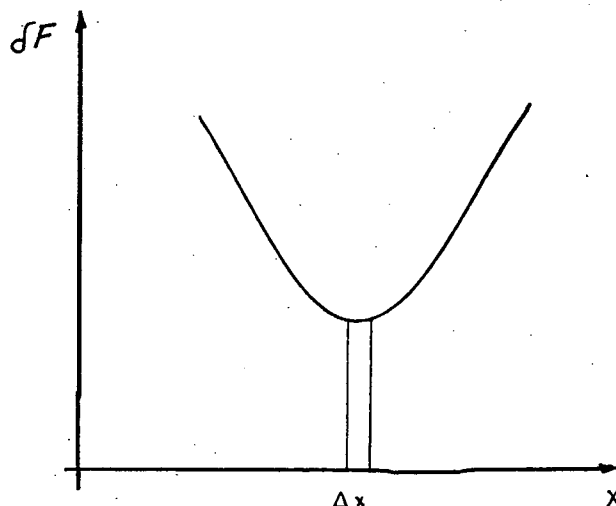


Figura 1.1. - Variação $\delta F = 0$, para uma variação infinitesimal de x .

Para uma função $F(x,y,z)$ a diferencial é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (1.2)$$

No cálculo funcional, esta diferencial é escrita da seguinte forma:

$$\delta F = \int_D \left[\frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \frac{\partial F}{\partial V_x'} \delta V_{x'} + \frac{\partial F}{\partial V_y'} \delta V_{y'} + \frac{\partial F}{\partial V_z'} \delta V_{z'} \right] dD = 0 \quad (1.3)$$

Como:

$$\delta V_{x'} = \delta \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta V) \quad (1.4)$$

$$\delta V_{y'} = \frac{\partial}{\partial y} (\delta V) \quad (1.5)$$

$$\delta V_{z'} = \frac{\partial}{\partial z} (\delta V) \quad (1.6)$$

Definindo $\vec{\nabla}$ como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.7)$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta V) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta V) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\delta V) \vec{k} = \vec{\nabla} (\delta V) \quad (1.8)$$

Onde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} são os vetores unitários ortogonais, usualmente utilizados no sistema cartesiano O_{xyz} .

Chamaremos \vec{g} o seguinte vetor:

$$\vec{g} = \frac{\partial F}{\partial V_{x'}} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial V_{y'}} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial V_{z'}} \vec{k} \quad (1.9)$$

Temos:

$$\delta F = \int_D \left[\frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \left(\frac{\partial F}{\partial V_x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial V_y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial V_z} \vec{k} \right) \cdot (\delta V_x \vec{i} + \delta V_y \vec{j} + \delta V_z \vec{k}) \right] dD \quad (1.10)$$

como:

$$\delta V_x \vec{i} + \delta V_y \vec{j} + \delta V_z \vec{k} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta V) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta V) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\delta V) \vec{k} = \vec{\nabla} \cdot (\delta V) \quad (1.11)$$

Obtemos:

$$\delta F = \int_D \left[\frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \vec{g} \cdot \vec{\nabla} (\delta V) \right] dD \quad (1.12)$$

Como:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \mu) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \mu + \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (1.13)$$

e por analogia

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \delta V) = \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \delta V + \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \quad (1.14)$$

Logo

$$\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \delta V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \delta V) - \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \quad (1.15)$$

na integração fica

$$\int_D \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \delta V dD = \int_D \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \delta V) dD - \int_D \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dD \quad (1.16)$$

Usando o teorema da divergência temos:

$$\int_D \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \delta V \, dD = \int_S \delta V \cdot \vec{g} \cdot \vec{n} \, ds - \int_D \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \, dD \quad (1.17)$$

Introduzindo-se (1.17) em (1.12):

$$\delta F = \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \right) \delta V \, dD + \int_S \delta V \vec{g} \cdot \vec{n} \, ds \quad (1.18)$$

Logo para que $\delta F=0$, é necessário que:

$$\int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \right) \delta V \, dD = 0 \quad (1.19)$$

E

$$\int_S \delta V \cdot \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (1.20)$$

Como δV é um valor arbitrário, para que a equação (1.19) seja nula é necessário que:

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0 \quad (1.21)$$

Expandindo-se a equação (1.21)

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{x'}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{y'}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{z'}} \right) = 0 \quad (1.22)$$

Que é conhecida como a equação de Euler-Lagrange.

Portanto a funcional F deve ser tal que seu integrando F aplicado à equação de Euler-Lagrange conduza a uma expressão veri

ficada no domínio.

Analisando a equação (1.20), verificamos que temos a integral de superfície, que nos dá a superfície que envolve o domínio D. Logo a expressão (1.20) nos fornece as equações de contorno.

Então, sobre a superfície S, uma das duas condições seguintes devem ser verificadas.

- V é imposto e constante, portanto $\delta V = 0$, o que é a condição de Dirichlet.

ou

- $\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$, o que é a condição natural, ou de Neumann.

1.2.1. Conclusões da Formulação Variacional

A formulação variacional portanto significa que:

- A equação de Euler-Lagrange deve ser verificada em todo o domínio.
- As condições de contorno devem ser:
 - V é imposto, ou
 - $\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$

Logo a funcional \bar{F} escolhida deve ser tal que estas condições sejam verificadas.

1.3. Os Casos Estudados

1.3.1. Eletrostática

No caso eletrostático, nós temos a equação abaixo para ser resolvida:

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (1.23)$$

$$\text{Rot } \vec{E} = 0 \quad (1.24)$$

Onde \vec{D} é o vetor indução elétrica
 \vec{E} é o vetor campo elétrico

Sabendo-se que

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.25)$$

Onde ϵ é a permissividade elétrica.

$$\text{div } \epsilon \vec{E} = 0 \quad (1.26)$$

Definamos um potencial escalar elétrico V_ℓ do qual deriva um campo elétrico \vec{E} .

$$\vec{E} = - \text{grad } V_\ell \quad (1.27)$$

Como $\text{Rot } \vec{E} = 0$ e $\text{Rot.grad} = 0$ a equação acima é válida.

Logo

$$\text{Div } \epsilon \vec{E} = - \text{div } \epsilon \text{grad } V_\ell = 0 \quad (1.28)$$

Temos assim a equação que deve ser tratada numericamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V_\ell}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V_\ell}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \frac{\partial V_\ell}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

Podemos também resolver problemas de correntes estacionárias ($\text{div } \vec{J} = 0$, $\vec{J} = \tau \vec{E}$)

1.3.2. Magnetostática

No caso magnetostático nós temos as equações abaixo para serem resolvidas, admitindo-se que não haja corrente no domínio de cálculo

$$\text{Rot } \vec{H} = 0 \quad (1.30)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.31)$$

onde \vec{H} é o vetor campo magnético
 \vec{B} é o vetor indução magnética.

Sabendo-se que

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.32)$$

onde μ é a permeabilidade magnética

Como $\text{Rot } \vec{H} = 0$, definamos um potencial escalar V do qual deriva o campo magnético \vec{H} , como

$$\vec{H} = - \text{grad } V \quad (1.33)$$

Logo

$$- \text{div} \mu \text{ grad } V = 0 \quad (1.34)$$

Temos então a equação que deve ser tratada numericamente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (1.35)$$

1.3.3. Imãs Permanentes

Atualmente, a tecnologia envolvendo imãs-permanentes tem evoluído de maneira significativa (fabricação em grande escala de imãs utilizando samário-cobalto), e como consequência os dispositivos eletromagnéticos utilizando imãs tem suscitado um grande

interesse por parte das indústrias. Faremos então também o equacionamento dos ímãs permanentes.

Sabemos que o ímã, possui uma imantação remanente B_r . Para que esta imantação seja nula é necessário aplicar ao ímã um campo $- \vec{H}_c$, chamando campo coercitivo; logo a característica de um ímã é dada, em boa aproximação conforme a figura abaixo:

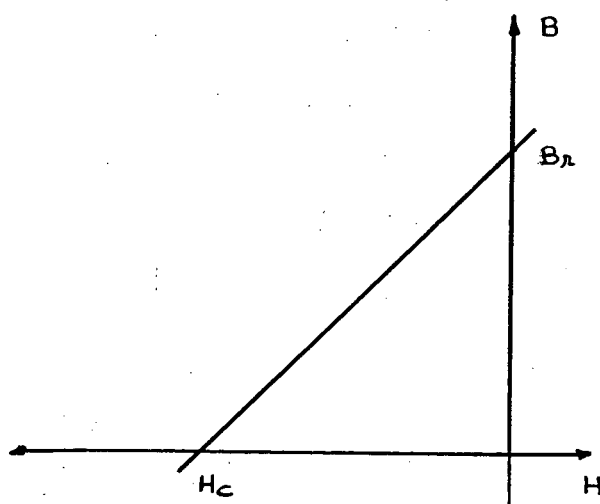


Figura 1.2. - Curva característica do ímã-permanente

Sabendo disto, temos então que:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_c \quad (1.36)$$

onde \vec{B}_c é o vetor indução remanente

como

$$\vec{B}_c = \mu_c \vec{H}_c \quad (1.37)$$

onde \vec{H}_c é o vetor campo magnético coercitivo

μ_c é a permeabilidade magnética do ímã

Logo a equação a ser resolvida é:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.38)$$

$$\text{Rot } \vec{H} = 0 \quad (1.39)$$

Temos então:

$$\text{div } (\mu \vec{H} + \vec{B}_c) = 0 \quad (1.40)$$

Definamos um potencial escalar V do qual deriva o campo magnético \vec{H}

$$\vec{H} = - \text{grad } V \quad (1.41)$$

Como $\text{rot } \vec{H} = 0$ e $\text{rot.grad} = 0$ a equação acima é válida.

Logo

$$- \text{div } \mu \text{ grad } V + \text{div } \vec{B}_c = 0 \quad (1.42)$$

Temos então a equação que deve ser tratada numericamente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_c H_{cx} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_c H_{cy} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_c H_{cz} \quad (1.43)$$

1.4. A Minimização da Funcional

Como no nosso estudo, trataremos os casos escalares a funcional que corresponde aos casos tratados neste trabalho é a seguinte: [1]

$$F = \int_D \left[\int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{h} \right] dD \quad (1.44)$$

Nota: H é o módulo do campo magnético \vec{H}

Cujo integrando é a densidade volumétrica de energia magnética. Cabe salientar que existe uma dualidade entre o problema eletrostático e magnetostático, temos uma correspondência entre \vec{E} e \vec{H} bem como entre \vec{D} e \vec{B} .

Como foi dito anteriormente, esta equação deve ser verificada para todo o domínio na equação de Euler-Lagrange.

Mostraremos então que a funcional acima é identificada por uma de nossas equações a resolver:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.45)$$

onde

$$\vec{H} = - \text{grad } V \quad (1.46)$$

$$H_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - V_x' \quad (1.47)$$

$$H_y = - \frac{\partial V}{\partial y} = - V_y' \quad (1.48)$$

$$H_z = - \frac{\partial V}{\partial z} = - V_z' \quad (1.49)$$

Para aplicarmos a equação de Euler precisamos das seguintes expressões:

$$\frac{\partial F}{\partial V_x'} = - \frac{\partial F}{\partial H_x} \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_y'} = - \frac{\partial F}{\partial H_y} \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_z'} = - \frac{\partial F}{\partial H_z} \quad (1.52)$$

Como o integrando F da funcional \bar{F} , é:

$$F = \int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{h}$$

Calculemos então:

$$-\frac{\partial F}{\partial V_X} = -\frac{\partial F}{\partial H_X} = -\frac{\partial}{\partial H_X} \int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{h} \quad (1.53)$$

Seja

$$\frac{\partial F}{\partial H_X} = \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial H_X} \quad (1.54)$$

Temos:

$$\frac{\partial F}{\partial H_X} = \frac{\partial}{\partial H} \int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{h} \frac{\partial H}{\partial H_X} = B \frac{\partial H}{\partial H_X} = \mu H \frac{\partial H}{\partial H_X} \quad (1.55)$$

Logo

$$\frac{\partial F}{\partial H_X} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial H_X} \quad (1.56)$$

Sabendo que

$$H^2 = H_X^2 + H_Y^2 + H_Z^2 \quad (1.57)$$

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial H_X} = \mu H_X = B_X \quad (1.58)$$

Por analogia

$$\frac{\partial F}{\partial H_Y} = B_Y \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial F}{\partial H_z} = B_z \quad (1.60)$$

Portanto a equação de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{x'}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{y'}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial V_{z'}} \right) = 0 \quad (1.61)$$

como $\frac{\partial F}{\partial V} = 0$, pois $F = \int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{h}$ não depende de V ,

Com isso, a equação acima torna-se

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0 \quad (1.62)$$

ou seja

$$\text{Div } \vec{B} = 0$$

Por outro lado, quanto as condições de contorno temos:

$$\frac{\partial F}{\partial V_{x'}} n_x + \frac{\partial F}{\partial V_{y'}} n_y + \frac{\partial F}{\partial V_{z'}} n_z = 0$$

Como tal

$$B_x n_x + B_y n_y + B_z n_z = 0$$

ou seja:

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$$

Logo podemos concluir, que F aplicado a equação de Euler-Lagrange, nos conduziu à equação de Maxwell, $\text{div } \vec{B} = 0$, que define a distribuição de \vec{B} no domínio de estudo, o que valida a expressão de F .

Quanto às condições de contorno, onde nada é especificado o campo \vec{H} é perpendicular ao vetor normal \vec{n} , isto é, o campo \vec{H} é tangente à fronteira (condição de Neumann).

Quanto à condição de Dirichlet, que corresponde a um potencial V constante e imposto, o campo \vec{H} é perpendicular à fronteira onde o mesmo foi imposto, tendo em vista que, sendo V constante, temos ali uma equipotencial.

CAPÍTULO 2

A TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA

2.1. Introdução

Nesta parte do nosso estudo, iremos detalhar a técnica de aproximação por elementos finitos. Vamos introduzir as noções de elementos de referência e de funções de interpolação. Apresentaremos o elemento utilizado neste trabalho juntamente com as suas funções de interpolação. Numa fase seguinte, faremos a resolução numérica dos problemas tratados neste trabalho. Abordaremos os problemas analiticamente, cujo objetivo é prepará-los para a resolução utilizando a técnica de elementos finitos.

Finalmente veremos a técnica de integração numérica, que é parte importante, na formulação isoparamétrica.

2.2. O Elemento de Referência e as Funções de Interpolação [2]

O caso do elemento triangular será abordado, por ser um elemento bastante conhecido e de fácil compreensão.

Um elemento de referência V_r , é um elemento de forma muito simples, que é colocado num espaço de referência, que pode ser transformado em cada elemento real V_k , por uma transformação geométrica Δ^k .

No caso do triângulo, observemos a figura abaixo:

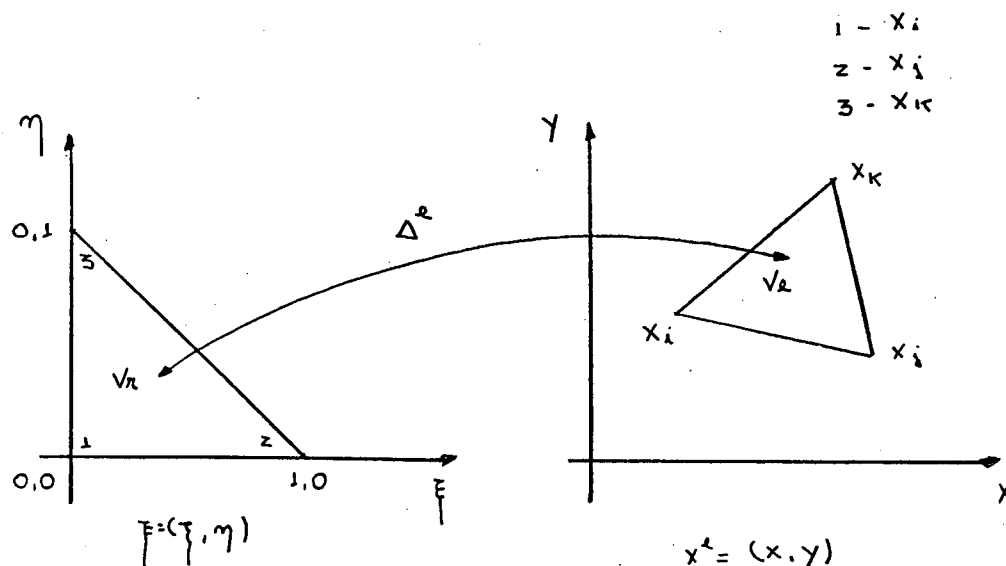


Figura 2.1. - O Elemento Referência e o Elemento Real

A transformação Δ^l define as coordenadas X^l de cada ponto do elemento real, a partir das coordenadas ξ , do ponto correspondente do elemento de referência.

$$\Delta^l : \xi \rightarrow X^l = X^l(\xi) \quad (2.1)$$

A transformação Δ^l depende da forma e da posição do elemento real, ou seja, é dada pelas coordenadas dos nós geométricos que o definem. Então, há uma transformação Δ^l diferente para cada elemento real, devido a mudança de elemento para elemento, das coordenadas.

Agora, definiremos então, o que é a transformação Δ^l :

Suponhamos uma transformação linear Δ , que é relacionada com as coordenadas $\{X_n\}$ dos nós geométricos do elemento real V_l .

$$\Delta : \xi \rightarrow X(\xi) = [N(\xi)] \{X_n\} \quad (2.2)$$

Podemos repetir a mesma coisa para as outras coordenadas, então temos:

$$X(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{X_n\} \quad (2.3)$$

$$Y(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{Y_n\} \quad (2.4)$$

$$Z(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{Z_n\} \quad (2.5)$$

Onde $N(\xi)$ são as funções de interpolação que fazem o mapeamento do elemento real, para o elemento de referência. Então para um triângulo de 3 nós (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) , (X_k, Y_k) temos:

$$X(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) X_i + N_2(\xi, \eta) X_j + N_3(\xi, \eta) X_k = \langle N \rangle \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$Y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) Y_i + N_2(\xi, \eta) Y_j + N_3(\xi, \eta) Y_k = \langle N \rangle \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \\ Y_k \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Como exemplo, vamos calcular estas funções num elemento triangular, a três nós. [2]

O elemento de referência é definido analiticamente por:

$$\xi + \eta \leq 1 \quad (2.8)$$

$$\xi \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\eta \geq 0 \quad (2.10)$$

Consideraremos a transformação linear Δ em ξ, η :

$$X(\xi, \eta) = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Δ :

$$Y(\xi, \eta) = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \\ Y_k \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

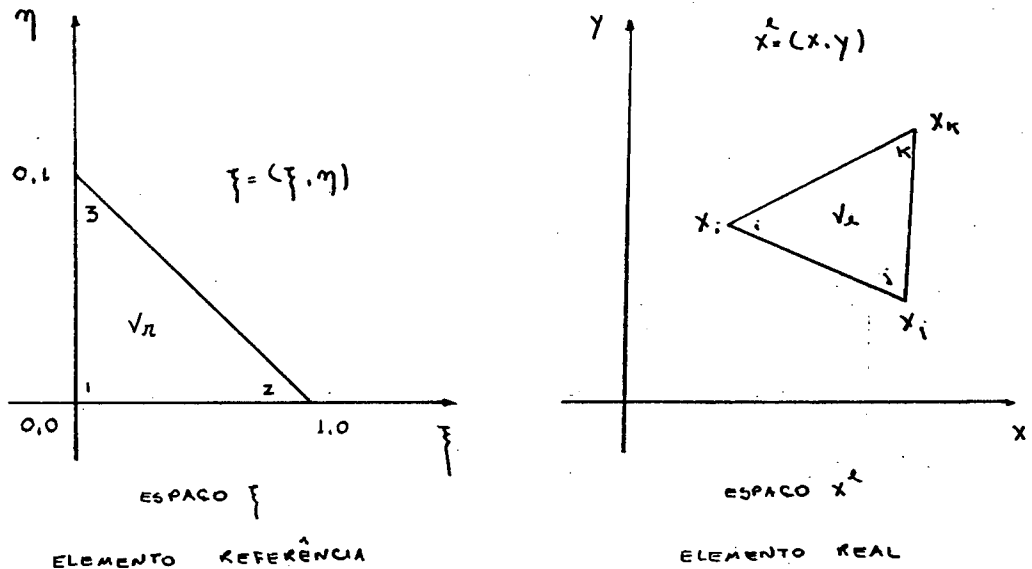


Figura 2.2. - Elemento Triangular

As funções de interpolação verificam as propriedades seguintes:

- os nós geométricos de V_r , de coordenadas $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 0 \rangle$ e $\langle 0, 1 \rangle$, se transformaram nos nós geométricos de V_k de coordenadas X_i , X_j , X_k , por exemplo:

$$X(\xi = 0, \eta = 0) = \langle 1 \quad 0 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \end{Bmatrix} = X_i \quad (2.13)$$

- cada fronteira de V_r se transforma na fronteira correspondente V_k . Por exemplo, a fronteira passante pelos nós $\langle 1, 0 \rangle$ e $\langle 0, 1 \rangle$, da equação $1 - \xi - \eta = 0$, se trans

forma na fronteira de V_k . Passando por X_j e X_k dada pela equação paramétrica abaixo:

$$X = \langle 0 \quad \xi \quad 1 - \xi \rangle \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \end{Bmatrix} = \xi X_j + (1 - \xi) X_k \quad (2.14)$$

$$Y = \langle 0 \quad \xi \quad 1 - \xi \rangle \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \\ Y_k \end{Bmatrix} = \xi Y_j + (1 - \xi) Y_k \quad (2.15)$$

É importante observar que esta equação é linear em ξ e η , e depende somente das coordenadas (X_i, Y_i) e (X_k, Y_k) dos nós situados sobre esta fronteira.

- A transformação Δ é bijectiva se a matriz $|J|$ não é singular

$$|J| = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_j - X_i & Y_j - Y_i \\ X_k - X_i & Y_k - Y_i \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{DET}(J) = (X_j - X_i)(Y_k - Y_i) - (X_k - X_i)(Y_j - Y_i) \quad (2.17)$$

Este determinante é igual a duas vezes a área do triângulo, e somente se anulará se os nós estiverem alinhados.

Concluindo, podemos dizer que, toda e qualquer estrutura pode ser analisada, mediante a escolha do elemento de referência adequado e consequentemente das funções de interpolação usadas.

2.3. O Elemento Isoparamétrico [2]

O elemento utilizado neste estudo é o elemento:

- Isoparamétrico
- Tri-Linear
- Hexaédrico
- com 8 nós
- e com continuidade C^0 .

Este elemento foi escolhido, por ser um elemento muito versátil, que nos possibilita uma análise muito boa de qualquer estrutura tridimensional, seja ela de faces planas, ou curvilíneas, o que é de grande utilidade na análise dos diversos dispositivos eletromagnéticos.

Apresentamos a seguir, na figura, o elemento utilizado:

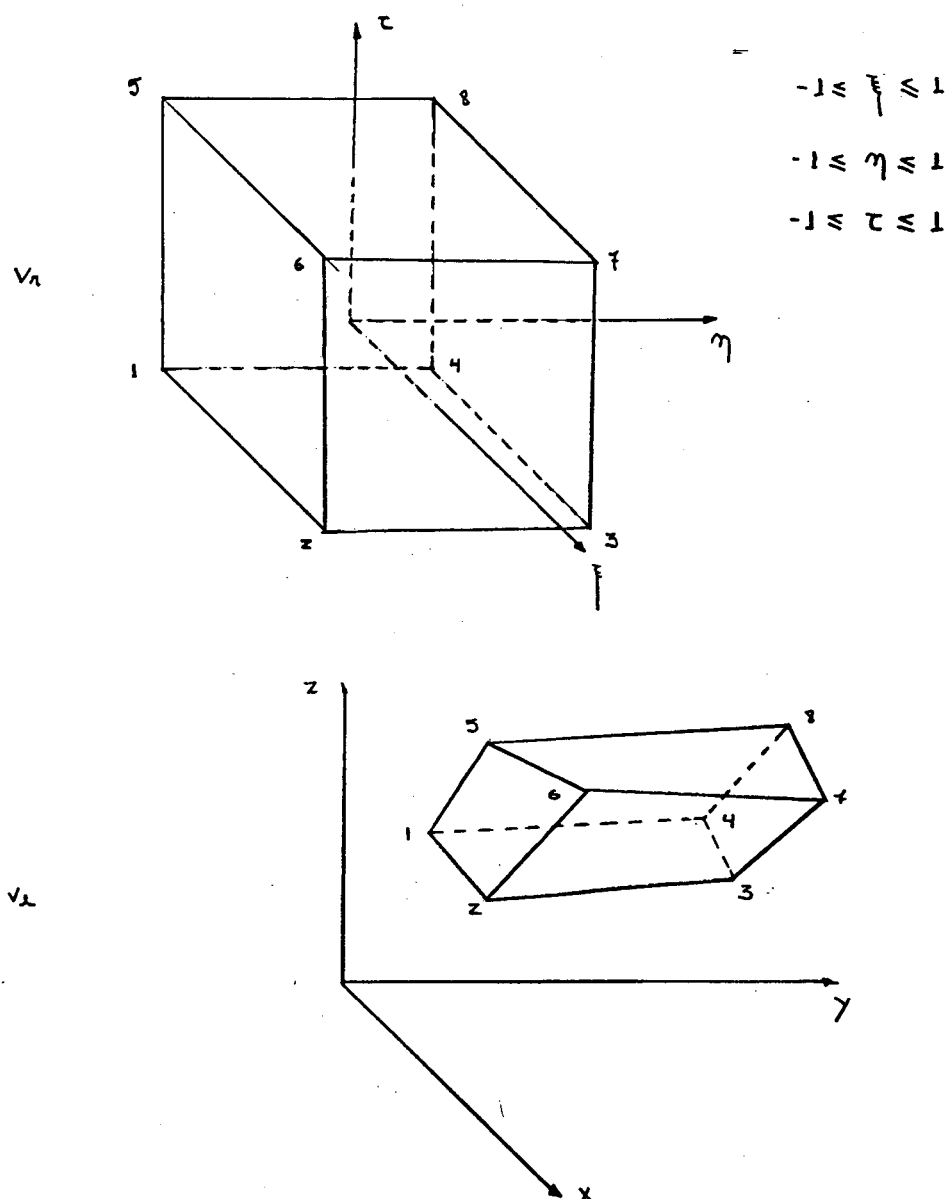


Figura 2.3. - O Elemento isoparamétrico utilizado

Temos, na tabela a seguir as funções de interpolação deste tipo de elemento, bem como suas derivadas, cuja utilidade será evidenciada nos próximos parágrafos.

	$\frac{1}{c} \{ N \}$	$\frac{1}{c} \{ \partial N / \partial \xi \}$	$\frac{1}{c} \{ \partial N / \partial \eta \}$	$\frac{1}{c} \{ \partial N / \partial \zeta \}$	$1/c$
1	$a_2 b_2 c_2$	$- b_2 c_2$	$- a_2 c_2$	$- a_2 b_2$	1/8
2	$a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$- a_1 c_2$	$- a_1 b_2$	
3	$a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$a_1 c_2$	$- a_1 b_1$	
4	$a_2 b_1 c_2$	$- b_1 c_2$	$a_2 c_2$	$- a_2 b_1$	
5	$a_2 b_2 c_1$	$- b_2 c_1$	$- a_2 c_1$	$a_2 b_2$	
6	$a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$- a_1 c_1$	$a_1 b_2$	
7	$a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$a_1 c_1$	$a_1 b_1$	
8	$a_2 b_1 c_1$	$- b_1 c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b_1$	

$$a_1 = 1 + \xi; \quad a_2 = 1 - \xi$$

$$b_1 = 1 + \eta; \quad b_2 = 1 - \eta$$

$$c_1 = 1 + \zeta; \quad c_2 = 1 - \zeta$$

Tabela 2.1 - Funções de interpolação e suas derivadas para o elemento isoparamétrico de 8 nós [2]

2.4. A Análise Matemática Linear

Como já foi visto anteriormente, a aplicação do método variacional, consiste em minimizar uma certa funcional em relação aos potenciais desconhecidos nos nós, o que pode ser expresso sob a forma:

$$\frac{\partial F}{\partial V_k} = 0 \quad (2.18)$$

A resolução deste problema será mostrada nas sessões seguintes.

2.4.1. O Potencial Escalar

Como visto anteriormente

$$F = \int_D \left[\int_0^H \vec{b} \cdot d\vec{H} \right] dD \quad (2.19)$$

Fazendo-se a derivação em relação a um nó qualquer temos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_k} = \iiint_V \left(\mu H_x \frac{\partial H_x}{\partial V_k} + \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial V_k} + \mu H_z \frac{\partial H_z}{\partial V_k} \right) d_x d_y d_z = 0 \quad (2.20)$$

Analisando a equação por partes, e expandindo o potencial V_k para os outros nós do elemento teremos:

$$\begin{array}{ccc} H_x \frac{\partial H_x}{\partial V_i} & H_x \left| \frac{\partial H_x}{\partial V_i} \right| & H_x \left| \frac{\partial}{\partial V_i} \right| H_x \\ H_x \frac{\partial H_x}{\partial V_j} & = \left| \frac{\partial H_x}{\partial V_j} \right| & = \left| \frac{\partial}{\partial V_j} \right| H_x \\ H_x \frac{\partial H_x}{\partial V_k} & \left| \frac{\partial H_x}{\partial V_k} \right| & \left| \frac{\partial}{\partial V_k} \right| H_x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (2.21)$$

Sabendo que

$$\vec{H} = - \text{grad } V \quad (2.22)$$

E levando em conta que as funções de interpolação são também válidas para o potencial definido nos nós, temos:

$$V = \langle N \rangle \{V_n\} \quad (\text{vide eqs. 2.3, 2.4, 2.5}) \quad (2.23)$$

Logo

$$H_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[N^T \cdot V_n \right] = \frac{\partial}{\partial x} V_n^T \cdot N \quad (2.24)$$

$$H_y = \frac{\partial}{\partial y} V_n^T \cdot N \quad (2.25)$$

$$H_z = \frac{\partial}{\partial z} V_n^T \cdot N \quad (2.26)$$

Então

$$H_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} H_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} N^T \cdot V_n \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V_n^T \cdot N \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N^T V_n \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} V_n^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} N$$

Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} V_n^T = \mathbb{1}$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade

Teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} N^T V_n \frac{\partial}{\partial x} N = \frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N \cdot V_n \quad (2.27)$$

Logo, a equação (2.20) é escrita como

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_k} = \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} N^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} N + \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N + \frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right] \mu V_n dx dy dz \quad (2.28)$$

Que é a equação necessária para o tratamento numérico.

2.4.2. Os Imãs Permanentes

A análise matemática dos imãs permanentes é semelhante a anterior, relativo ao potencial escalar. A diferença consiste no fato que, como visto anteriormente, o imã, possui um campo magnético coercitivo. Como indicado na equação abaixo:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_c \quad (2.29)$$

Então

$$\frac{\partial F}{\partial V_k} = \iiint_V \left[(\mu H_x + B_{cx}) \frac{\partial H_x}{\partial V_k} + (\mu H_y + B_{cy}) \frac{\partial H_y}{\partial V_k} + (\mu H_z + B_{cz}) \frac{\partial H_z}{\partial V_k} \right] dx dy dz \quad (2.30)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial V_k} = & \iiint_V \left[\mu H_x \frac{\partial H_x}{\partial V_k} + \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial V_k} + \mu H_z \frac{\partial H_z}{\partial V_k} \right] dx dy dz + \\ & \iiint_V \left[B_{cx} \frac{\partial H_x}{\partial V_k} + B_{cy} \frac{\partial H_y}{\partial V_k} + B_{cz} \frac{\partial H_z}{\partial V_k} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (2.31)$$

A primeira parte da equação é idêntica ao visto na sessão anterior, analisaremos então a segunda parcela.

$$\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = \iiint_V \left[B_{cx} \frac{\partial H_x}{\partial V_k} + B_{cy} \frac{\partial H_y}{\partial V_k} + B_{cz} \frac{\partial H_z}{\partial V_k} \right] dx dy dz \quad (2.32)$$

Temos:

$$\begin{array}{ccc}
 B_{cx} \frac{\partial H_x}{\partial V_i} & B_{cx} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial H_x}{\partial V_i} \\ \frac{\partial H_x}{\partial V_j} \\ \frac{\partial H_x}{\partial V_k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & \Rightarrow B_{cx} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] H_x \\
 B_{cx} \frac{\partial H_x}{\partial V_j} \rightarrow & & \\
 B_{cx} \frac{\partial H_x}{\partial V_k} & & \\
 \vdots & & \\
 \vdots & & \\
 \vdots & &
 \end{array} \quad (2.33)$$

Como

$$\vec{H} = - \text{grad } V \quad (2.34)$$

$$V = \langle N \rangle \{V_n\} \quad (2.35)$$

$$H_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} |N^T \cdot V_n| = \frac{\partial}{\partial x} V_n^T \cdot N \quad (2.36)$$

$$H_y = \frac{\partial}{\partial y} V_n^T \cdot N \quad (2.37)$$

$$H_z = \frac{\partial}{\partial z} V_n^T \cdot N \quad (2.38)$$

Logo

$$B_{cx} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V_n^T \cdot N = B_{cx} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} V_n^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} N$$

Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial V_i} \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \\ \frac{\partial}{\partial V_k} \end{vmatrix} V_n^T = \hat{1}$$

onde $\hat{1}$ é a matriz identidade

Temos:

$$B_{cx} \frac{\partial}{\partial x} N \quad (2.39)$$

Por analogia,

$$-\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = \iiint_V \left[B_{cx} \frac{\partial}{\partial x} N + B_{cy} \frac{\partial}{\partial y} N + B_{cz} \frac{\partial}{\partial z} N \right] d_x d_y d_z \quad (2.40)$$

A equação para posterior análise numérica é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial V_k} = & \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N + \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N + \frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right] \mu V_n d_x d_y d_z + \\ & \iiint_V \left[B_{cx} \frac{\partial}{\partial x} N + B_{cy} \frac{\partial}{\partial y} N + B_{cz} \frac{\partial}{\partial z} N \right] d_x d_y d_z \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.5. As Expressões Matriciais [2]

2.5.1. As Formas Integrais sobre o Elemento Real

Para se obter a forma discretizada das equações anteriormente descritas, são utilizadas as seguintes expressões:

$$V = \langle N \rangle \{V_n\} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{V_n\} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \{V_n\} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \{V_n\} \quad (2.45)$$

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \{u_n\} = [B] \{u_n\} \quad (2.46)$$

Logo a equação

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_k} = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N + \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N + \frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right] \mu V_n dx dy dz \quad (2.47)$$

Pode ser escrita sob a forma matricial abaixo:

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_k} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u_n\} \quad (2.48)$$

Onde

$$\{u_n\} = \{V_n\} \quad (2.49)$$

E

$$[D] = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Logo a matriz de contribuições 8 x 8 do nosso trabalho é da forma:

$$[g] = \int_V [B]^T \cdot [B] \mu dV \quad (2.51)$$

2.5.2. A Forma Integral sobre o Elemento de Referência

Como visto anteriormente para passarmos do elemento real para o elemento de referência, é necessário que transformemos as derivações em x, y, z para derivações em ξ, η, ζ , e ainda, a integração sobre o elemento real em uma integração sobre o elemento de referência.

2.5.2.1. A Transformação das derivadas em x, y, z

As derivadas em x, y, z são expressas em função das derivadas em ξ, η, ζ , através da matriz inversa da matriz Jacobiana: $[j] = [J]^{-1}$.

No caso tridimensional

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

A expressão da matriz $[B]$ pode então ser escrita da seguinte forma:

$$[B] = [Q]^{-1} [B\xi] \quad (2.53)$$

Onde $[Q]$ é a matriz $[j] = [J]^{-1}$

$[B\xi]$ é uma matriz semelhante a $[B]$, contendo as derivadas em ξ, η, ζ das funções $N(\xi, \eta, \zeta)$ ao invés das derivadas em x, y, z das funções $N(x, y, z)$.

2.5.2.2. A Transformação do Domínio de Integração

A passagem da integral de volume do elemento real para o elemento de referência é obtida através da seguinte relação.

$$\int_{V_r} d_v = \int_{V_r} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.54)$$

e os limites de integração em ξ, η, ζ para o elemento de referência hexaédrico são:

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=1} \dots \det(J) d\zeta d\eta d\xi \quad (2.55)$$

Logo a matriz de contribuições 8×8 fica sendo:

$$[g] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B\xi]^T [Q]^T [D] [Q] [B\xi] \det(J) d\zeta d\eta d\xi \quad (2.56)$$

Para o imã permanente, além da matriz acima, tem-se adicionalmente a matriz que é resultante da relação:

$$\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = \iiint \left[\mu H_{cx} \frac{\partial}{\partial x} N + \mu H_{cy} \frac{\partial}{\partial y} N + \mu H_{cz} \frac{\partial}{\partial z} N \right] d_x d_y d_z \quad (2.57)$$

Logo

$$\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = \int_{V_\ell} [D] [H_c] [B] d_v \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = [D] [H_c] \int_{V_\ell} [B] d_v \quad (2.59)$$

Como

$$[B] = [Q] [B_\xi] \quad (2.60)$$

Temos

$$\frac{\partial F_2}{\partial V_k} = [D] [H_c] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q] [B_\xi] \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.61)$$

2.5.3. O Cálculo do Jacobiano, de seu Determinante e de sua Inversa

O cálculo do jacobiano é feito da seguinte maneira:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{X_n\} \{Y_n\} \{Z_n\} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

O cálculo do $\text{DET}(J)$, não apresenta dificuldades particulares, pois a matriz resultante do Jacobiano, é uma matriz 3×3 , assim como a sua inversa, ou seja:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Logo

$$\text{DET}(J) = J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22}) \quad (2.64)$$

E a inversa

$$[J]^{-1} = [j] = \frac{1}{\text{DET}(J)} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.6. Exemplo de cálculo utilizando-se o elemento triangular

Como o elemento triangular a tres nós é o elemento de mais fácil compreensão, faremos um breve exemplo para explicar a técnica acima descrita.

Temos então:

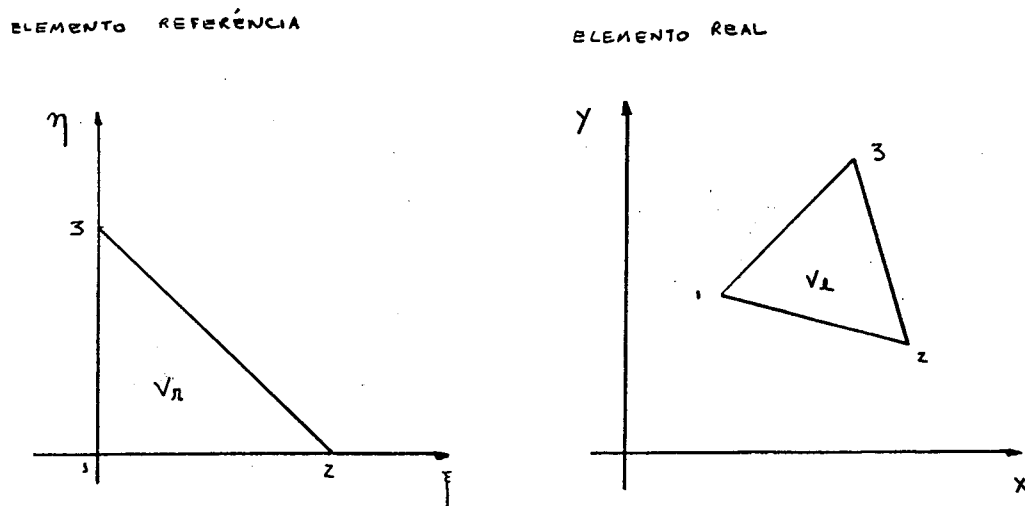


Figura 2.4. - Exemplo : Elemento Triangular

A função de interpolação é dada por: [2]

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle$$

- Cálculo do Jacobiano

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \langle x \quad y \rangle = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do Determinante

$$\text{DET}(J) = (X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1) = 2A$$

Onde A é a área do triângulo

- Cálculo da Inversa

$$[j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (Y_3 - Y_1) & - (Y_2 - Y_1) \\ - (X_3 - X_1) & (X_2 - X_1) \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[B\xi]$

$$[B\xi] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[B]$

$$[B] = [j] [B\xi] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 \\ X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[D]$

$$[D] = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- No caso do triângulo a integração para se calcular a matriz de contribuições 3 x 3 é:

$$[g] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mu [B]^T [B] \det(J) d\xi d\eta$$

Como a matriz $[B]$ neste caso é constante

$$[g] = A \cdot \mu [B]^T [B]$$

Logo

$$[g] = \frac{\mu}{4A} \begin{bmatrix} (Y_3 - Y_2)^2 + (X_3 - X_2)^2 & (Y_3 - Y_2)(Y_1 - Y_3) + (X_3 - X_2)(X_1 - X_3) & (Y_2 - Y_1)(Y_3 - Y_2) + (X_2 - X_1)(X_3 - X_2) \\ \text{SIMÉTRICA} & (Y_3 - Y_1)^2 + (X_3 - X_1)^2 & (Y_1 - Y_3)(Y_2 - Y_1) + (X_1 - X_3)(X_2 - X_1) \\ & & (Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2 \end{bmatrix}$$

Embora o exemplo acima seja particular, podemos adiantar que a conclusão abaixo relacionada com este caso, é geral para os diferentes tipos de elementos finitos:

Geralmente as matrizes de contribuições por elementos finitos, são simétricas, o que nos possibilita trabalhar somente com a banda superior das matrizes, tanto no armazenamento em memória, como na resolução dos sistemas de equações que são geradas por esta técnica numérica.

2.7. A Integração Numérica [2]

2.7.1. Introdução

Como foi observado nos parágrafos precedentes, a aplicação do método dos elementos finitos, necessita a resolução de várias integrais, cuja a resolução analítica é extremamente laboriosa e inviável; por esta razão a implementação deste método passa necessariamente por integrações numéricas como veremos abaixo.

2.7.2. O Método de Integração Numérica de Gauss

Com a aplicação da técnica de elementos finitos, verificamos que a nossa matriz de contribuições $[g]$, tem a seguinte forma:

$$[g] = \int_{V_r} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det(J(\xi)) dV_r \quad (2.66)$$

Onde V_r é o volume do elemento de referência.

No caso dos imãs permanentes, teremos também a equação abaixo:

$$[g_1] = \int_{V_r} [D] [H_c] [B(\xi)] \det(J(\xi)) dV_r \quad (2.67)$$

Os integrandos dessas equações são polimônios, ou frações racionais de forma complexa; logo sua integração analítica não é uma tarefa muito fácil, o que nos conduz a recorrer a um método de integração numérica.

Escolhemos o método de integração de Gauss, pois é um método numérico muito utilizado, conhecido por sua eficácia, e que

se adapta muito bem a resolução das integrais dos nossos problemas.

Primeiramente, vamos fazer a análise da integração numérica de Gauss a uma dimensão, para então evoluir ao problema em tres dimensões.

Vamos supor que desejamos calcular a integral abaixo:

$$\int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi \quad (2.68)$$

A integração numérica corresponde a transformar esta integral em uma somafinita de termos do tipo:

$$\int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi = W_1 Y(\xi_1) + W_2 Y(\xi_2) + \dots + W_r Y(\xi_r) \quad (2.69)$$

Logo, a nossa integral assume a seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i) \quad (2.70)$$

Onde os coeficientes W_i e as abcissas ξ_i serão determinados de maneira a integrar exatamente os polimônios $Y(\xi_i)$ de ordem $M \leq 2r - 1$, onde r é o número de pontos de integração.

Como exemplo, consideremos o polimônio abaixo:

$$Y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (2.71)$$

A determinação dos $2r$ coeficientes, implica que a equação (2.70), seja verificada exatamente para o polimônio acima:

$$a_1 \int_{-1}^1 d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \xi d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^1 \xi^{2r-1} d\xi =$$

$$a_1 \sum_{i=1}^r W_i + a_2 \sum_{i=1}^r \xi_i W_i + \dots + a_{2r} \sum_{i=1}^r \xi_i^{2r-1} W_i \quad (2.72)$$

Para que a equação acima seja identicamente verificada para todo a_1, a_2, \dots, a_{2r} é necessário que:

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2 \quad (2.73)$$

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

Os valores acima obtidos, são resultados dos cálculos das integrais, vejamos:

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \left. \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_{-1}^1$$

Para os valores pares de α temos então

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1}$$

E para os valores ímpares de α temos:

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = 0$$

Este sistema de $2r$ equações (2.73), é linear em W_i e não linear em ξ_i , e determina os $2r$ parâmetros da equação (2.70), sobre as seguintes condições:

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ -1 < \xi_i < 1 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

A seguir vamos fazer um exemplo numérico, para que os princípios acima sejam melhor esclarecidos.

Supondo que desejemos calcular através do método de Gauss os coeficientes de um polinômio, onde $r = 2$. Então a expressão (2.69) é calculada da seguinte maneira:

$$\int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi = W_1 Y(\xi_1) + W_2 Y(\xi_2)$$

Como

$$M \leq 2r - 1 \quad \text{e} \quad r = 2, \quad M \leq 3$$

Logo o polinômio a ser utilizado é:

$$Y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3$$

Logo

$$\int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi = a_1 \int_{-1}^1 d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi + a_4 \int_{-1}^1 \xi^3 d\xi$$

$$= a_1 \sum_{i=1}^r W_i + a_2 \sum_{i=1}^r \xi_i W_i + a_3 \sum_{i=1}^r \xi_i^2 W_i + a_4 \sum_{i=1}^r \xi_i^3 W_i$$

Onde $r = 2$

Logo, para que a expressão acima seja identicamente verificada para todo a_1, a_2, a_3, a_4 é necessário aplicarmos as equações (2.73).

Logo para que esta aproximação seja exata para um polinômio de ordem $2r - 1 = 3$, é necessário que as relações a seguir sejam satisfeitas:

$$W_1 + W_2 = 2$$

$$W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 = 0$$

$$W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações temos:

$$W_1 = W_2 = 1$$

$$\xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo a integração da matriz de contribuições⁶⁶ $[g]$, equação (2.66), em um caso a uma dimensão é a seguinte:

$$[g] \cong [B(\xi_1)]^T \left[[D] \cdot W_1 \det(J(\xi_1)) \right] [B(\xi_1)] + \\ [B(\xi_2)]^T \left[[D] \cdot W_2 \det(J(\xi_2)) \right] [B(\xi_2)]$$

Onde $\xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$W_1 = W_2 = 1$$

2.7.3. A Integração Numérica a tres dimensões

Para o elemento de referência hexaédrico utilizado, temos a integral abaixo. Para que possamos determinar os parâmetros necessários, é necessário efetuar a integração. Os parâmetros são os coeficientes W_i e as abcissas ξ_i .

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^i \eta^j \zeta^k d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Se } i \text{ ou } j \text{ ou } k \text{ é ímpar} \\ \frac{8}{(i+1)(j+1)(k+1)} & \text{Se } i \text{ e } j \text{ e } k \text{ são pares} \end{array} \right.$$

(2.74)

É evidente que cada vez que necessitarmos dos parâmetros para se realizar a integração numérica, não resolveremos o sistema acima. Os valores dos parâmetros são tabelados e são encontrados nas referências bibliográficas [2], [3].

A transformação da integral do nosso problema é a seguinte:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} W_i W_j W_k Y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

(2.75)

Onde W_i, W_j, W_k são os coeficientes, ou pesos de integração.

ξ_i, η_j, ζ_k são as abcissas, ou coordenadas dos pontos de integração.

Como o nosso elemento de referência é o hexaédrico, temos os seguintes pontos de integração, que podem ser verificados na figura abaixo:

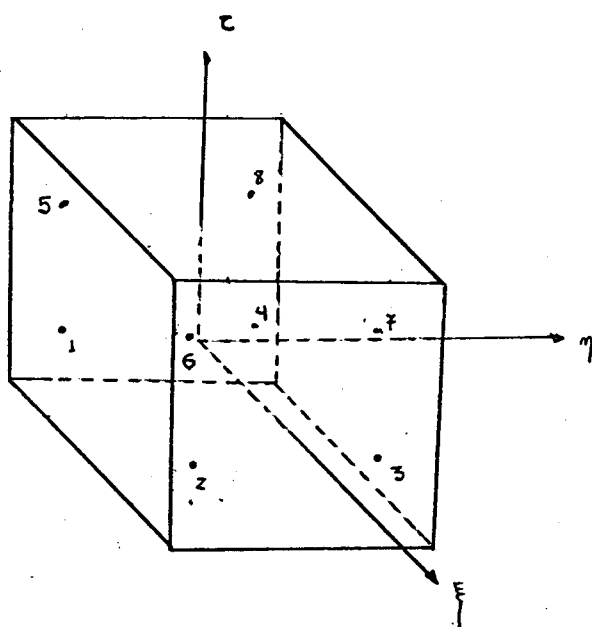


Figura 2.5. - Pontos de Integração para elemento hexaédrico

Temos então, dois pontos de integração em cada direção logo $r_1 = r_2 = r_3 = 2$, os valores de W_i, W_j, W_k e de ξ_i, η_j, ζ_k são os seguintes: [2] [3].

$$W_i = W_j = W_k = 1$$

$$\xi_i = \eta_j = \zeta_k = \pm 0,577\ 350\ 269\ 189\ 626\ (\pm 1/\sqrt{3})$$

2.8. A Organização do Cálculo das Matrizes Elementares por Integração Numérica

Para o problema descrito pelas equações (2.66) e (2.67), o cálculo das matrizes elementares se dará através do seguinte algoritmo:

- Entrada dos valores de W_i , W_j , W_k e de ξ_i , η_j , ζ_k
- Para cada ponto de integração, calcular os valores das derivadas das funções de interpolação nos pontos de integração
- Para o cálculo da matriz de rigidez $[g]$ de cada elemento
 - . Inicializar $[g]$ a zero.
 - . Para cada ponto de integração.
 - Calcular a matriz Jacobiana $[J]$ a partir das derivadas das funções de interpolação em ξ, η, ζ e das coordenadas dos nós.
 - Calcular as derivadas das funções de interpolação em X, Y, Z a partir das derivadas em ξ, η, ζ .
 - Construir as matrizes $[B]$ e $[D]$
 - Acumular em $[g]$ o produto $[B]^T [D] [B] \det(J) W_r$.
- Para o cálculo da matriz do imã $[g1]$ de cada elemento.
 - . Inicializar $[g1]$ a zero
 - . Para cada ponto de integração
 - Calcular $[B]$ como anteriormente
 - Acumular em $[g1]$ o produto $[H_C] [D] [B] \det(J) W_r$.
- Para o cálculo dos gradientes nos pontos de integração a partir da solução $\{u_n\}$ de cada elemento.

- . Inicializar vetor de gradientes a zero.
- . Para cada ponto de integração
 - Construir a matriz $[B]$ como anteriormente
 - Calcular o gradiente $\{\partial u\} = [B] \{u_n\}$

2.9. Conclusão

A integração numérica, como podemos observar da teoria acima, recai em um somatório dos valores parciais do integrando das equações (2.66) e (2.67).

No nosso caso, como são oito pontos de integração, temos oito produtos parciais de $[B]^T [D] [B] \det(J)$, que após acumulados nos darão o valor final da matriz de rigidez elementar. Esta matriz deverá ser condensada no sistema global, que após a inserção das condições de contorno pode ser resolvido, visto que este é um sistema linear de equações. A solução deste sistema nos fornece os potenciais nos nós da malha, através dos quais podemos obter os gradientes.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

3.1. Introdução

Neste capítulo vamos analisar os diversos métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

Como foi visto nos capítulos precedentes, as matrizes que são obtidas através da técnica de elementos finitos, são na maioria dos casos simétricas. Além disto as matrizes a serem tratadas são também do tipo "BANDA". Assim, devido as propriedades acima, nós podemos então armazenar em memória somente uma semi-banda da matriz; a economia de memória neste caso é bastante importante. Observa-se também que na semi-banda armazenada há muitos termos que são nulos, ou seja, a matriz é muito esparsa.

Se armazenarmos em memória toda a semi-banda, a posição dos termos na mesma será diretamente obtida pela aplicação natural do método de elementos finitos. Se desejarmos guardar em memória somente os termos não nulos, será necessário, uma tabela indicadora das posições reais dos elementos não nulos, como veremos nos próximos parágrafos; chamaremos esta técnica, de armazenamento compacto.

Ligados ao tipo de armazenamento estão os métodos de resolução dos sistemas de equações lineares normalmente, quando armazenamos a matriz de contribuições sob a forma de semi-banda, usamos métodos de resolução diretos ao tipo Gauss e do tipo Choleski, que são conhecidos por sua eficácia. Porém, durante o processo de resolução utilizando estes métodos, na posição onde temos termos nulos, são gerados termos não nulos, de tal forma que, no

final do processo a matriz de contribuições deixará de ser uma matriz esparsa, tornando-se então uma matriz quase plena.

Pensando-se em resolver este tipo de problema é que se passou a utilizar métodos iterativos, que nos possibilitam trabalhar com matrizes sob a forma compacta como acima explicado. Estes métodos nos permitem trabalhar com um domínio de cálculo muito maior, tendo em vista que os termos da matriz de contribuições serão apenas os termos não nulos, possibilitando assim um aumento substancial do número de nós.

Entre esses métodos iterativos, citemos os métodos de "sobre-relaxação" e "gradientes conjugados", cujo inconveniente é que as vezes eles se tornam muito lentos devido o grande número de iterações necessárias para uma boa convergência.

Associado ao problema do erro implícito, característico de métodos iterativos, temos o tempo; o problema do tempo de cálculo, sempre longo devido ao número grande de iterações.

Existe, para este tipo de método um evidente compromisso entre utilização de memória, tempo de cálculo e erro ligado a convergência.

Pensou-se em utilizar um método moderno, conhecido por sua eficiência, no que tange ao compromisso acima citado. Este método é conhecido sob o nome de ICCG (Incomplete Choleski Conjugated Gradient) e consiste em fazer-se um pré-condicionamento, que tem por resultado um melhor condicionamento das matrizes envolvidas no processo de cálculo, possibilitando assim uma convergência mais rápida.

As técnicas de armazenamento, juntamente com os respectivos métodos de resolução serão explicados detalhadamente nas secções seguintes.

Ao final deste capítulo, nós faremos uma comparação detalhada dos diversos métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

3.2. As Técnicas de Armazenamento das Matrizes

Na técnica de elementos finitos, para cada elemento de uma malha é calculada uma matriz chamada de matriz elementar, ou matriz de contribuições. No problema a ser resolvido a matriz de contribuições é uma matriz simétrica 8×8 . O número de matrizes elementares é então igual ao número de elementos que tivermos na malha. A matriz global ou matriz de rigidez global é uma matriz formada pela soma matricial ou "condensação" das matrizes elementares.

A título de exemplo mostraremos a condensação de uma malha contendo triângulos.

Consideremos os triângulos abaixo com a sua numeração interna (1, 2 e 3), e a sua numeração na malha geral (3, 5, 6 e 7):

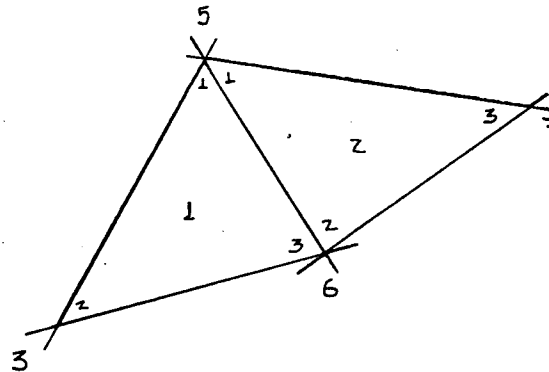


Figura 3.1. - Elementos Triangulares de uma malha qualquer

Como podemos observar, o triângulo 1 tem os nós numerados como a seguir:

1	—	5
2	—	3
3	—	6

clusões importantes que são:

- A matriz é simétrica
- Esparsa
- E do tipo "Banda".

A matriz global é simétrica pois ela é originada da condensação de matrizes elementares simétricas.

Quanto a esparsidade, ela dependerá da maneira que numerarmos os nós da malha, procurando sempre evoluir a numeração dos mesmos, de tal forma que em cada triângulo os números dos nós sejam o mais próximos possível.

3.2.1. A Matriz Banda

Como vimos anteriormente, a matriz global do sistema é do tipo banda; podemos então calcular a sua largura de banda da seguinte forma:

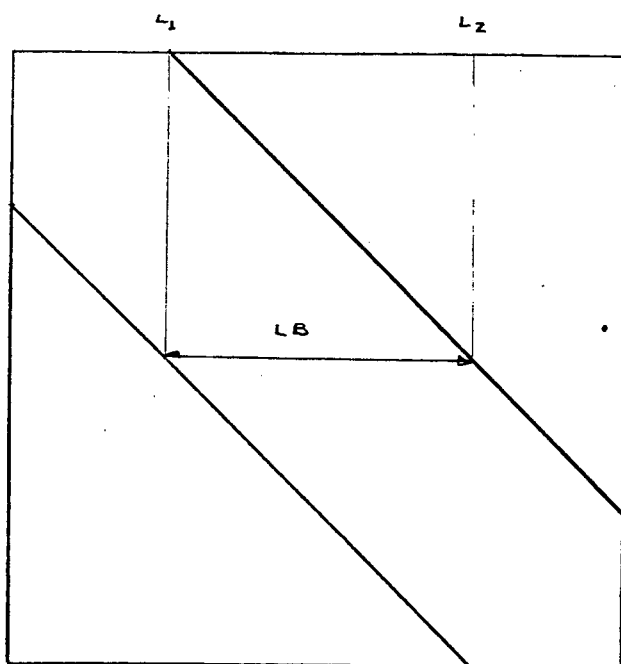


Figura 3.3. - Matriz Banda

A largura de banda é a "distância" entre os dois mais distantes nós, ou seja, entre os mais distantes termos da matriz global, obtível em uma linha. LB, largura de banda, pode ser obtida pela expressão abaixo:

$$LB = L2 - L1 + 1 \quad (3.1)$$

Tendo em vista que a técnica de elementos finitos por nós empregada, nos proporciona matrizes simétricas, podemos trabalhar apenas com a metade da matriz banda, ou a semi-banda.

Considere a figura abaixo:

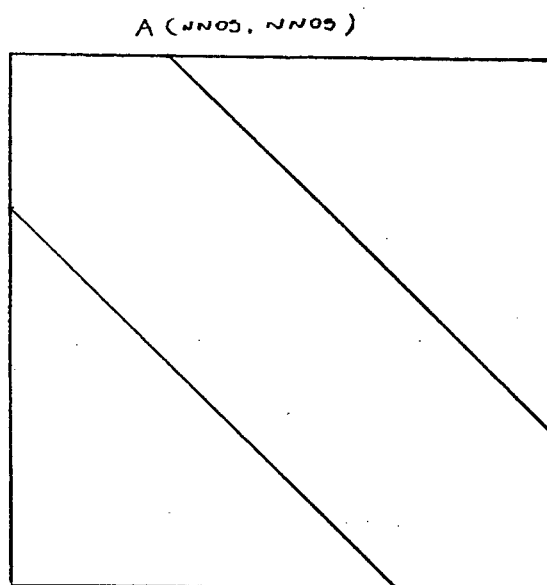


Fig - 3.4.a

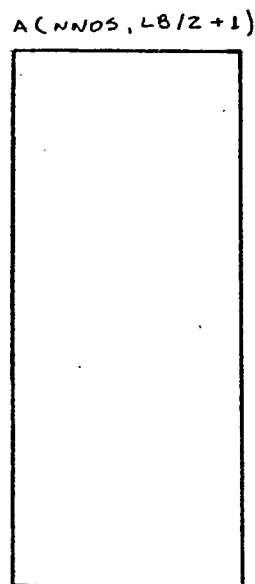


Fig - 3.4.b

Figura 3.4.a. - Matriz com arranjo do tipo (número total de nós, número total de nós)

Figura 3.4.b. - Matriz com arranjo do tipo (número total de nós, largura de banda/2+1)

Com isso a economia de memória do computador é substancial, e o tamanho dos arranjos serão tão menores, quanto menor for a largura de banda.

Como o armazenamento da matriz banda é feito sob uma for

ma diferente da matriz normal, deve existir uma relação de passagem entre os arranjos.

Vamos analisar o seguinte caso: supondo que temos um termo na matriz global, que ocupa a posição $A(7,15)$, na matriz banda ele ocupará a posição $A(7, 9)$; a relação que existe entre os arranjos é a seguinte $A(I, J)$ torna-se $A(I, JJ)$, onde $JJ = J - I + 1$; logo trabalhar na matriz banda é equivalente a fazê-lo na matriz global, fazendo para tanto, a troca de índices J por JJ .

3.2.2. A Matriz Compacta

Foi observado que a matriz semi-banda, possibilita uma grande economia de memória. Porém como já foi verificado anteriormente a mesma possui vários termos que são nulos, que a priori estão ocupando um espaço inútil. Este espaço poderia ser melhor aproveitado, se armazenássemos somente os termos não nulos, fazendo com que possamos ter um maior espaço de memória disponível para nós.

Para concretizar este processo é necessário ter-se duas matrizes, uma chamada matriz "INDIC" que é uma matriz de endereçamento dos termos da matriz global e a outra chamada de matriz "SS" que é a matriz que contém os termos não nulos da matriz global.

Observemos a figura abaixo:

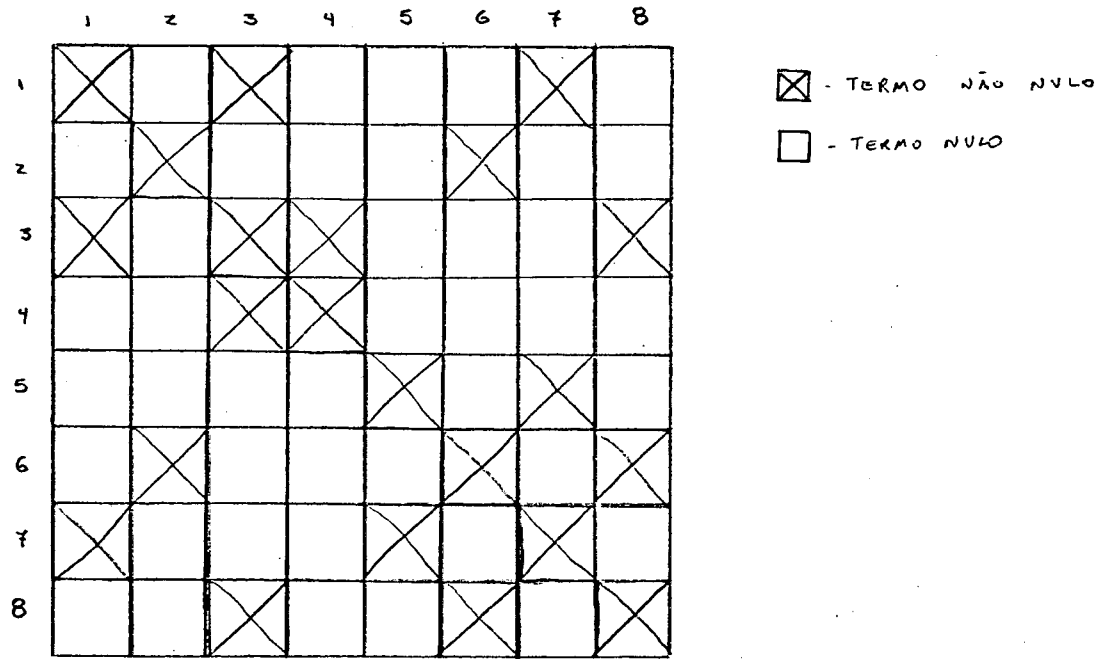


Figura 3.5. - Matriz Global, N termos nulos e M termos não nulos

Esta matriz pode ser colocada em dois arranjos como a seguir:

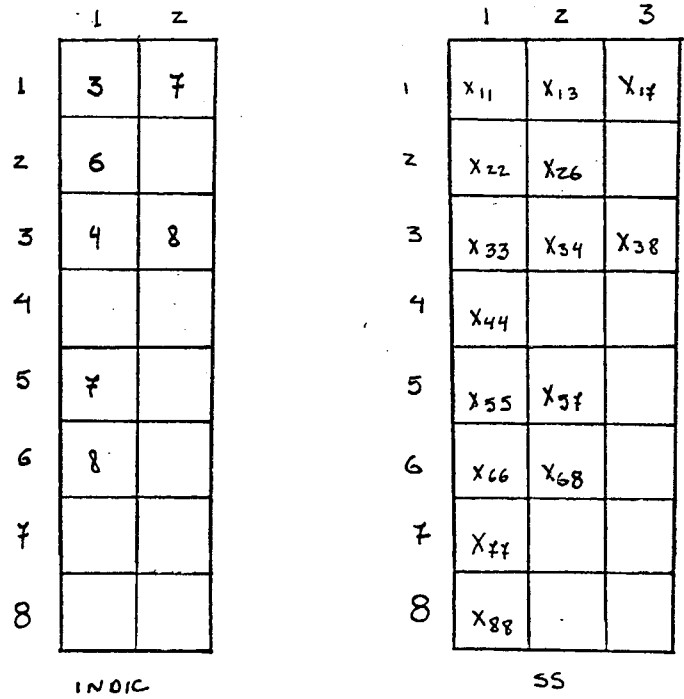


Figura 3.6. - Matriz INDIC e SS

A matriz "INDIC" contém o endereçamento dos termos fora da diagonal, e a matriz "SS" contém os termos não nulos da matriz.

O fato de alocarmos duas matrizes não implica em uma maior ocupação de memória, pois no exemplo acima, notamos que a dimensão do arranjo "INDIC" é (8, 2) e da matriz "SS" é (8, 3) e logo, o espaço total de memória ocupado pelos dois arranjos é de 40 posições, enquanto que o espaço de memória ocupado pela matriz semi-banda, é de 64 posições. Esta diferença aumenta quando aumentarmos o número de nós, pois os arranjos "INDIC" e "SS" aumentarão somente numa direção, enquanto que na matriz semi-banda o acréscimo ocorre nas duas direções.

Neste trabalho as duas dimensões da matriz "INDIC" e "SS" são respectivamente (número total de nós, 14) e (números total de nós, 15), pois a experiência nos mostra que o número de nós "vizinhos", a um certo nó, não excede 14.

Outra vantagem deste tipo de armazenagem é que não precisamos ter uma malha obrigatoriamente bem numerada, para que minimizemos a largura de banda; neste tipo de armazenagem a numeração pode ser qualquer, pois vamos somente armazenar os termos não nulos.

Um inconveniente neste tipo de armazenamento, é que sua implementação exige um trabalho computacional muito complexo e que deve ser feito com bastante cuidado, pois a probabilidade de cometer erros é grande.

O armazenamento da matriz global na forma compacta se presta muito bem para a resolução iterativa de sistemas de equações lineares, pois neste tipo de resolução, não há criação de novos termos matriciais.

3.3. As Condições de contorno

Como sabemos um sistema de equações lineares é escrito sob a forma $AX = b$; no nosso caso a matriz "A" é a matriz global de contribuições, "X" é o vetor de potenciais incógnitos nos nós, "b" é o vetor do lado direito que contém os termos independentes.

Porém para a resolução do sistema é necessário fazermos a inserção dos potenciais já conhecidos, ou seja, das condições de contorno. A inserção das condições de contorno no nosso trabalho é feita da seguinte maneira: no termo diagonal da matriz global coloca-se um número grande, na ordem de 10^{20} , no vetor "b" ou vetor do lado direito, coloca-se o valor do potencial $V_{\text{no}} \text{ nó}$ multiplicado pelo mesmo fator 10^{20} ($V_* \cdot 10^{20}$); nos outros termos da linha correspondente ao potencial imposto nada é feito.

Para que se esclareça melhor a proposição acima, vejamos o exemplo abaixo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{— Posição em que deve ser inserida a condição de contorno.}$$

Usando a regra acima temos:

$$\begin{vmatrix} 10^{20} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_* \cdot 10^{20} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Do sistema acima, tem-se

$$10^{20} \cdot V_1 + a_{12} \cdot V_2 + a_{13} \cdot V_3 = V_* \cdot 10^{20}$$

$$V_1 = (V \cdot 10^{20} - a_{12} \cdot V_2 - a_{13} \cdot V_3) / 10^{20} \approx \frac{10^{20} \cdot V}{10^{20}}$$

Logo

$$V_1 \approx V$$

Temos então a inserção da condição de contorno V .

Existe ainda, outro método de inserção de condições de contorno, o qual podemos verificar abaixo:

Vamos supor, que tenhamos a matriz "A" simétrica.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— inserção de condição} \\ \text{de contorno.} \\ \\ \\ \text{— inserção de condição} \\ \text{de contorno.} \end{array}$$

O método de inserção de condição de contorno, consiste em, colocar-se na linha e coluna onde deve ser inserida a condição, zeros, e no termo diagonal 1. Logo supondo que os valores V_1 e V_4 são conhecidos, com valores V_A e V_B , temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \\ -a_{12} V_A - a_{24} V_B \\ -a_{13} V_A - a_{34} V_B \\ V_B \end{bmatrix}$$

E o sistema a resolver se reduz a:

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} V_A & -a_{24} V_B \\ -a_{13} V_A & -a_{34} V_B \end{bmatrix}$$

Com as condições de contorno inseridas.

$$V_1 = V_A$$

$$V_4 = V_B$$

3.4. Os Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares

No método de elementos finitos, a resolução de um sistema de equações lineares, é uma etapa importante.

Como sabemos o número de incógnitas do problema a ser resolvido é diretamente proporcional ao número de nós de nossa malha, logo se tivermos uma malha muito densa e consequentemente com muitos nós, teremos um problema de dimensões grandes a ser resolvido. Atualmente a maior parte dos μ -computadores disponíveis tem uma capacidade de memória de certa forma pequena, para os problemas que desejamos resolver.

Este problema é comum a vários setores da engenharia e sempre houve uma grande atividade de pesquisa nesta área computacional.

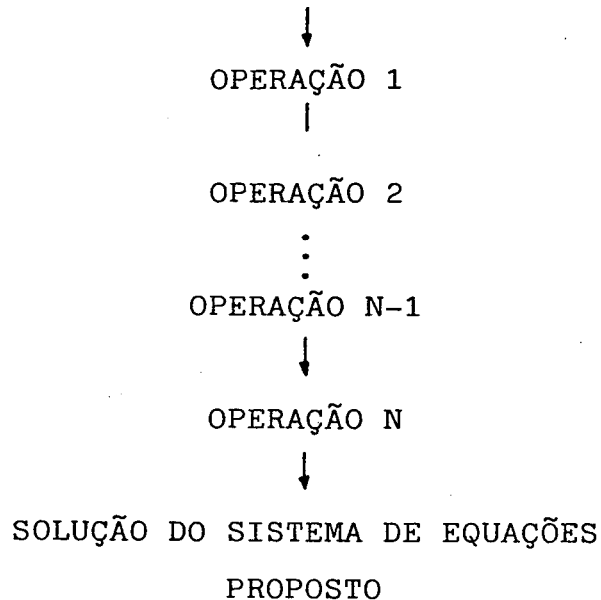
Os métodos de resolução de sistemas de equações lineares, podem ser divididos nas duas categorias abaixo:

- Métodos Diretos
- Métodos Iterativos

Os métodos diretos, são métodos que nos conduzem à solução através de um número de operações já conhecidas, tendo em vis

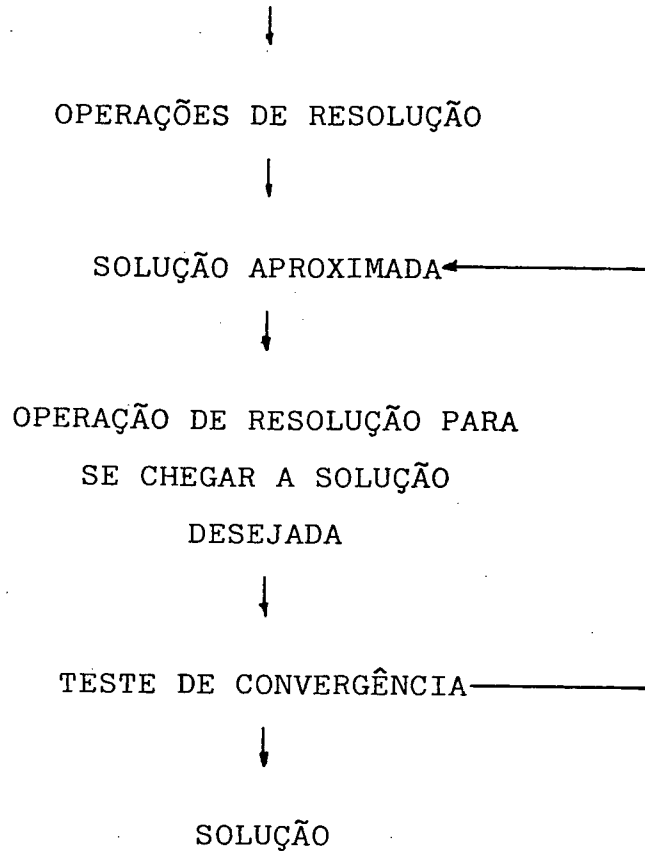
ta que estes métodos tem uma excelente aproximação numérica (salvo a precisão do computador). O algoritmo abaixo, que nos mostra que o princípio do método nos conduz diretamente à solução.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES
COM N INCÓGNITAS



Os métodos iterativos, são métodos que nos conduzem a solução por uma sucessão de cálculos aproximados da solução, sendo que o número de operações necessárias para se chegar a solução depende do erro de convergência adotado e da estrutura da matriz global. Com isto o número de operações necessárias para se chegar a solução desejada, pode variar conforme a natureza do pro-blema e do sistema matricial obtido; observe-se o algoritmo a seguir:

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES
COM N INCÓGNITAS



Os métodos diretos utilizados no nosso trabalho são:

- Método de Gauss, que é aplicável a toda matriz não singular, real ou complexa, simétrica ou não [3].
- Método de Choleski, que é aplicável a toda matriz real simétrica, definida positiva [3].

Estes métodos apresentam uma excelente aproximação numérica salvo, como já citado, a precisão do computador.

Os métodos iterativos utilizados no nosso trabalho são:

- Método de sobre-relaxação, que é aplicável a toda matriz real simétrica, não singular [4].
- Método dos gradientes conjugados, que é aplicável a toda matriz real, definida positiva [4].

- Método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento, aplicável a toda matriz real, simétrica, definida positiva [3].

Estes métodos apresentam uma solução aproximada da solução analítica.

3.4.1. Os Métodos Diretos

3.4.1.1. O Método de Eliminação de Gauss [2]

O método de Gauss, é um método muito conhecido e utilizado para a resolução de sistemas de equações lineares, tendo em vista que, é capaz de resolver qualquer tipo de sistema linear.

O método de Gauss normalmente é constituído de duas etapas, uma primeira etapa é chamada de triangularização, onde através de combinações lineares, transformamos o nosso sistema de equações num sistema triangular, normalmente superior.

A segunda etapa, chamada de substituição consiste em efetuar o produto matricial e resolver-se as equações de baixo para cima.

Estas etapas são detalhadas a seguir:

- Triangularização

Esta etapa nada mais é do que transformar um sistema de equações em um sistema triangular, ou seja:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ X \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ b \\ \end{bmatrix}$$

Onde A - Matriz Global

X - Vetor de Incógnitas

b - Vetor Independente

3.4.1.2. O Método de Choleski [3]

O método de Choleski, é um método de resolução de sistema de equações lineares, aplicado a toda matriz real simétrica de finida positiva.

O princípio do método de Choleski, consiste em que, podemos decompor a nossa matriz global "A" em $A = L.L^T$, fazendo com que o sistema assuma a forma $LL^T X = b$.

O algoritmo do método de Choleski é mostrado a seguir:

- Fatorar a matriz "A" sob a forma $A = LL^T$
- Procurar Y que é a solução de $L.Y = b$
- Procurar X que é a solução de $L^T.X = Y$

Para matrizes simétricas, o método de Choleski é preferível ao método de Gauss, pois ele necessita menos cálculos.

Uma propriedade integrante da matriz L é que, se a matriz "A" é uma matriz banda, a matriz L também será banda; nota-se também que durante as operações sobre "A", são criados termos não nulos em L, sem contudo aumentar a largura de banda.

Vamos agora fazer a análise da fatoração da matriz "A", que é o ponto mais importante deste item, tendo em vista que a obtenção de Y e X do algoritmo anterior, pode ser feita, como já visto, por substituição direta.

Partiremos de uma matriz "A", que será decomposta sob a forma $A = V^T.V$; escolhemos, neste caso, a matriz triangular superior, apenas por conveniência.

$$\text{Então } A = V^T.V.$$

Procuraremos então a matriz triangular superior V.

- os termos da diagonal são calculados da seguinte forma [6]

$$V_{1,1} = \left[A_{1,1} \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

Para $i = 2, 3, \dots, N$

$$V_{i,i} = \left[A_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{k,i}^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Onde N é a ordem da matriz "A"

- Os termos fora da diagonal são calculados da seguinte maneira:

$$V_{1,j} = A_{1,j}/V_{1,1} \quad (3.8)$$

Para $j = 2, 3, \dots, N$

E

$$V_{i,j} = \left[A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{k,i} V_{k,j} \right] / V_{i,i} \quad (3.9)$$

Para $i = 2, 3, \dots, N$

$j = i+1, i+2, \dots, N$

Como vimos anteriormente se a matriz "A", como no nosso caso, é uma matriz banda, a matriz "V" será também banda.

Logo, temos a nossa matriz "A", transformada para:

$$A_{i,j} \rightarrow A_{i, j-i+1}$$

Assim nosso algoritmo se tornará o seguinte:

$$V_{1,1} = [A_{1,1}]^{1/2} \quad (3.10)$$

Para $j = 2, 3, \dots, LB$, onde LB é a largura de banda temos:

$$V_{1,j} = A_{1,j}/V_{1,1} \quad (3.11)$$

Os outros termos da matriz são calculados como segue:

Para $i = 2, 3, \dots, N$

$$V_{i,1} = \left[A_{i,1} - \sum_{k=\alpha_i}^{i-1} (V_{k,i} - V_{k+1,i})^2 \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

Para $j = 2, 3, \dots, LB$

$$V_{i,j} = \left[A_{i,j} - \sum_{k=\alpha_i}^{i-1} V_{k,i+1-k} \cdot V_{k,i+j-k} \right] / V_{i,1} \quad (3.13)$$

Onde:

$\alpha_i =$ é o maior valor entre os seguintes valores
1 e $i - LB + 1$

Ou em fortran

$$\alpha_i = \text{MAX}(1, i - LB + 1)$$

Colocaremos aqui também o valor β_i , sendo β_i o menor valor entre os seguintes valores

$$i + LB - 1 \quad \text{e} \quad N$$

ou em fortran

$$\beta_i = \text{MIN}(i + LB - 1, N)$$

Os valores α_i e β_i são necessários para que não façamos mais operações, do que o necessário.

Após esta descrição da fatoração de A, veremos então o algoritmo de resolução de Y e X.

Para o cálculo de Y e X, usaremos as seguintes fórmulas:

$$Y_1 = b_1 / V_{1,1} \quad (3.14)$$

Para $i = 2, 3, \dots, N$

$$Y_i = \left[b_i - \sum_{k=\alpha_i}^{i-1} V_{k,i-k+1} \cdot Y_k \right] / V_{i,1} \quad (3.15)$$

$$X_N = Y_N / V_{N,1} \quad (3.16)$$

E para $i = N-1, N-2, \dots, 1$

$$X_i = \left[Y_i - \sum_{k=i+1}^{\beta_i} V_{i,k-i+1} \cdot X_k \right] / V_{i,1} \quad (3.17)$$

Para melhor esclarecermos esta fatoração, veremos o exemplo numérico abaixo:

Temos uma matriz "A" que é:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 5/8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Seguindo o algoritmo colocado anteriormente temos as seguintes operações a realizar:

$$V_{11} = a_{11}^{1/2} = 2$$

$$V_{12} = \frac{1}{V_{11}} a_{12} = 0,5$$

$$V_{22} = (a_{22} - V_{12}^2)^{1/2} = 0,5$$

·
·
·

Assim por diante

Logo a matriz V será a seguinte:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 1 & 0,25 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 & -0,25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a multiplicação de $V^T \cdot V$ obtemos a matriz A.

3.4.2. Os Métodos Iterativos

Neste parágrafo faremos uma ampla abordagem dos métodos iterativos, e procuraremos ver para que tipo de problemas eles são melhor adaptados. Ao final deste capítulo faremos uma comparação entre os métodos diretos e iterativos em exemplos bem distintos, para que possamos tirar conclusões definitivas a respeito dos métodos estudados.

3.4.2.1. O Método da Sobre-Relaxação [1]

O método da sobre-relaxação é um método muito simples de se equacionar; ele é derivado do método de Gauss-Seidel.

Vamos supor que temos o seguinte sistema a resolver:

$$A X = b$$

Sendo "A" a matriz global
 "X" o vetor de potenciais incógnitos
 "b" o vetor independente.

ou,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

As equações podem ser escritas da seguinte maneira:

$$X_1 = (b_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3 \dots - a_{1n} X_n) / a_{11} \quad (3.18)$$

$$X_2 = (b_2 - a_{21} X_1 - a_{23} X_3 \dots - a_{2n} X_n) / a_{22} \quad (3.19)$$

·
·
·

Generalizando-se

$$X_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j) / a_{ii} \quad (3.20)$$

O método de Gauss-Seidel consiste em, inicialmente fornecermos ao vetor incógnito X valores iniciais; então, por exemplo, para calcularmos um novo valor de X_1 , diferente do valor inicial, devemos usar os valores iniciais dados $X_2 \dots X_n$. Para calcularmos X_2 devemos utilizar o novo valor de X_1 e os valores iniciais dados $X_3 \dots X_n$, e assim sucessivamente. Quando fizermos as operações para todos os nós do sistema, teremos realizado uma iteração. Então passa-se para a próxima iteração, usando os valores calculados na iteração anterior, este processo se repetirá até obtermos a convergência.

A sobre-relaxação consiste em utilizar a variação dos valores incógnitos de uma iteração a outra.

Assim sendo, quando o valor X_i^{m+1} do nó é calculado, calcula-se a diferença:

$$\Delta X_i^{m+1} = X_i^{m+1} - X_i^m \quad (3.21)$$

Este valor, é multiplicado por um fator $(W-1)$, onde W é o coeficiente de relaxação, e somado ao valor X_i^{m+1} do nó calculado, logo o valor de X_i^{m+1} fica sendo:

$$X_i^{m+1} = X_i^{m+1} + (W-1) \Delta X_i^{m+1} \quad (3.22)$$

Com este tipo de procedimento aceleramos o método para a convergência.

O fator de sobre-relaxação W , convenientemente escolhido, permite melhorar a velocidade de convergência. O valor ótimo de W depende de cada problema; ele é normalmente determinado por experimentação numérica. No nosso caso o valor de W adotado é de 1.95 .

3.4.2.2. O Método dos Gradientes Conjugados [4]

A idéia do método dos gradientes conjugados de Hestenes e Stiefel, para a resolução de um sistema de equações $Ax \equiv b$, parte da observação da funcional $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$F(Z) = \frac{1}{2} (b - A_Z)^T A^{-1} (b - A_Z) \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{2} Z^T A Z - b^T Z + \frac{1}{2} b^T A^{-1} b \quad (3.24)$$

Que é minimizada pela solução exata X .

$$\emptyset = F(X) = \min F(Z) \quad \text{com } Z \in \mathbb{R}^n$$

Onde A e A^{-1} são matrizes definidas positivas e Z é um vetor que está ligado ao resíduo $r = b - Az$, onde normalmente $Z = X$.

A exposição completa do método dos gradientes conjugados é complexa e pode ser obtida com todo o rigor teórico na referência [4].

O algoritmo do método é o seguinte:

- Inicialização

- escolhamos um valor inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$, e calculemos:

$$r_0 = b - AX_0 \quad (3.25)$$

Para $k = 0, 1 \dots$

1 - Se $\rho_k < \text{erro estipulado}$, obtém-se a convergência; pois X_k é a solução de $AX = b$.

2 - Calcule

$$a_k = \frac{r_k^T r_k}{\rho_k^T A \rho_k} \quad (3.26)$$

$$X_{k+1} = X_k + a_k \rho_k \quad (3.27)$$

$$r_{k+1} = r_k - a_k A \rho_k \quad (3.28)$$

$$b_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \quad (3.29)$$

$$\rho_{k+1} = r_{k+1} + b_k \rho_k \quad (3.30)$$

Continue o cálculo até que $\rho_k < \text{erro}$.

Para a realização deste método, nós precisamos armazenar 4 vetores que são, X_k , r_k , ρ_k e $A\rho_k$.

Este método normalmente é mais lento do que o método de sobre-relaxação, mas tem propriedades de convergência muito melhores do que o método anterior, como veremos no final deste capítulo.

3.4.2.3. O Método dos Gradientes Conjugados com Pré-Condicionamento por decomposição incompleta de Choleski (I.C.C.G) [3] [7]

Na resolução de sistemas de equações lineares, através de métodos iterativos, um dos problemas principais é o tempo necessário para se obter a convergência, tendo em vista o número em geral elevado de iterações.

A partir do método dos gradientes conjugados, procurou-se obter um outro de convergência mais rápida; com isso surgiu o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Choleski [7].

O princípio do método se baseia no fato de que se aplicando um pré-condicionamento conveniente, podemos obter uma convergência em um número menor de iterações e consequentemente uma redução no tempo de cálculo.

A idéia do pré-condicionamento é a seguinte:

Considere o sistema de equações lineares abaixo:

$$A X = b$$

Se multiplicar-mos os dois lados da expressão por uma matriz C , não mudaremos o sistema, logo:

$$C . A X = C . b$$

Devemos achar então uma matriz C , que faça com que a multiplicação matricial $C.A$ seja o mais próximo possível da matriz identidade, para termos então:

$$I . X = C . b$$

Obtendo-se a solução do sistema.

A aplicação do método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Choleski pode ser verificada na equação abaixo [3].

$$(L^{-1} . A . (L^T)^{-1}) . L^T . X = L^{-1} . B \quad (3.31)$$

Onde L , é a matriz triangular inferior de pré-condicionamento.

Como o próprio nome do método nos indica, o nosso pré-con

dicionamento é incompleto, isto é, no cálculo da matriz de pré-condicionamento L , nós iremos calcular somente os termos $L_{i,j}$, que ocupem o mesmo lugar dos termos da matriz A . Foi visto nas sessões anteriores, que quando fazemos a decomposição, através do método de Choleski, criam-se novos termos, nas posições da matriz onde antes existiam termos nulos.

Como nós sabemos, a matriz de contribuições global, que advém da técnica de elementos finitos, tem a forma da matriz banda, como podemos verificar na figura abaixo.

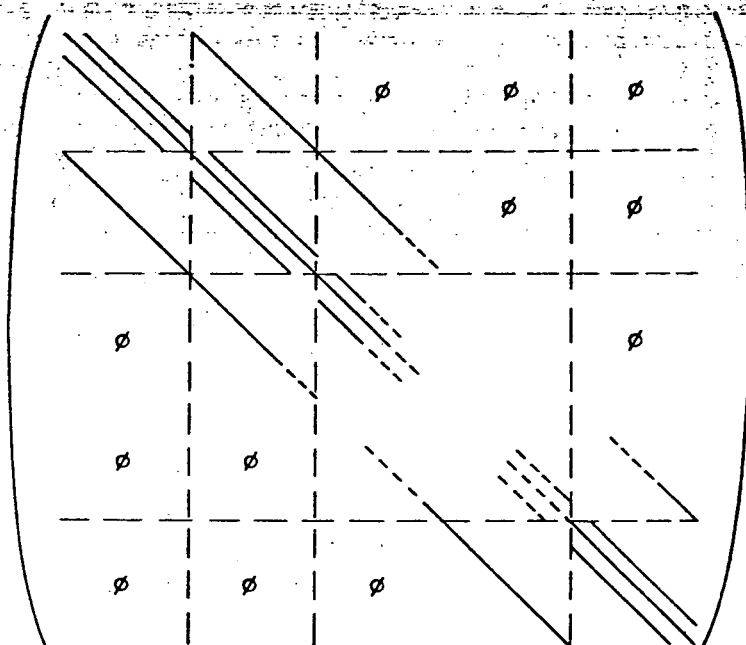


Figura 3.7. - Matriz A , tipo banda

Notemos que este tipo de matriz possui uma predominância diagonal, isto é, a soma dos termos de uma linha, nunca é superior ao termo diagonal da mesma. A matriz L , mantém esta propriedade da matriz A , ou seja, a matriz L , também possui, a diagonal forte, como podemos ver na figura 3.8.

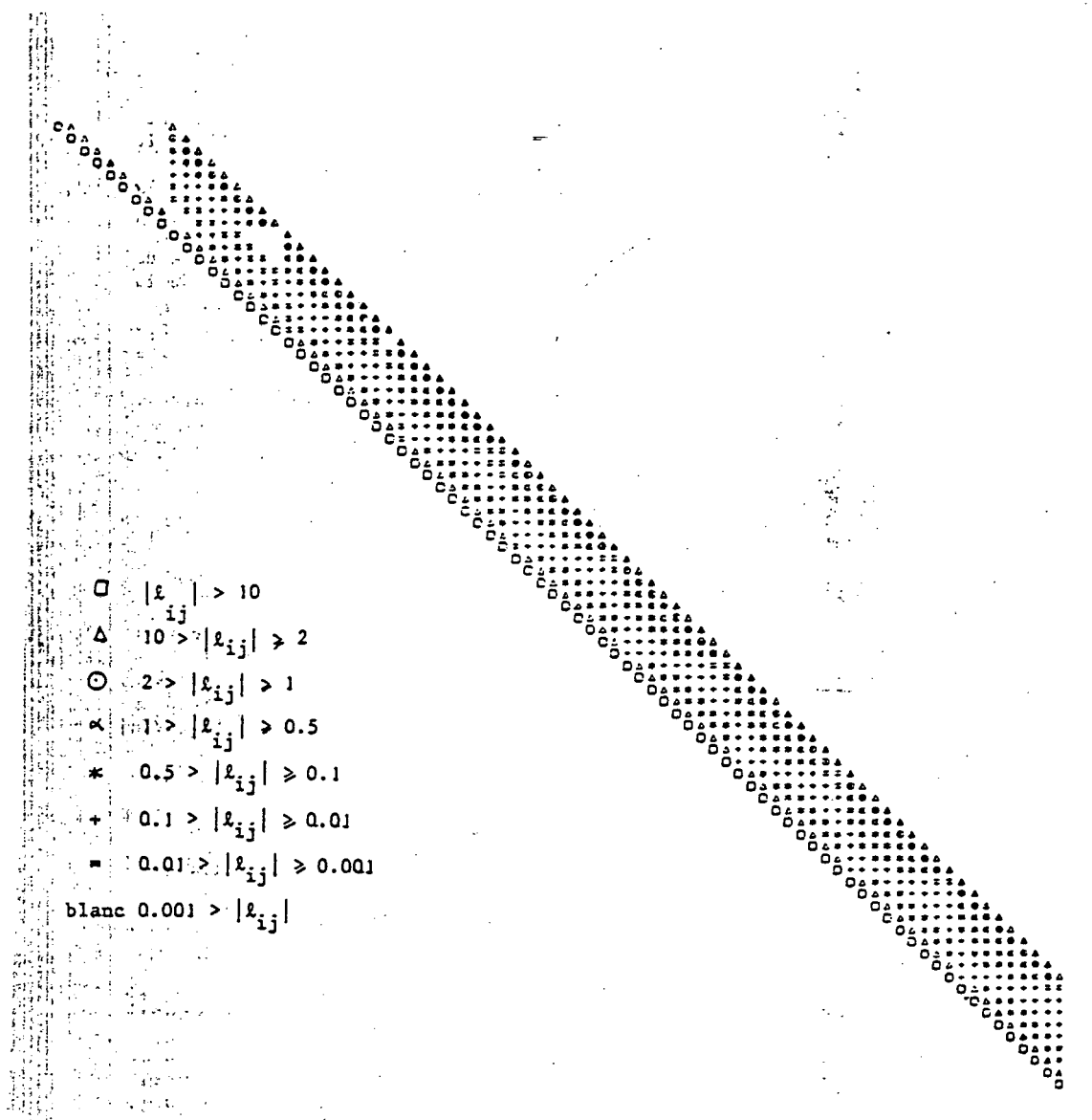


Figura 3.8. - Matriz L^T , tipo banda

Com estas afirmações, o pré-condicionamento, então pode ser feito de 2 formas:

- Utilizando-se a diagonal, mais duas colunas diagonais, acima da mesma, o que nos dará um bom pré-condicionamento.
- Numa segunda forma, além das 2 colunas diagonais acima, utilizam-se mais tres outras colunas, o que nos possibilita um pré-condicionamento ainda melhor, conforme

esquema da figura abaixo:

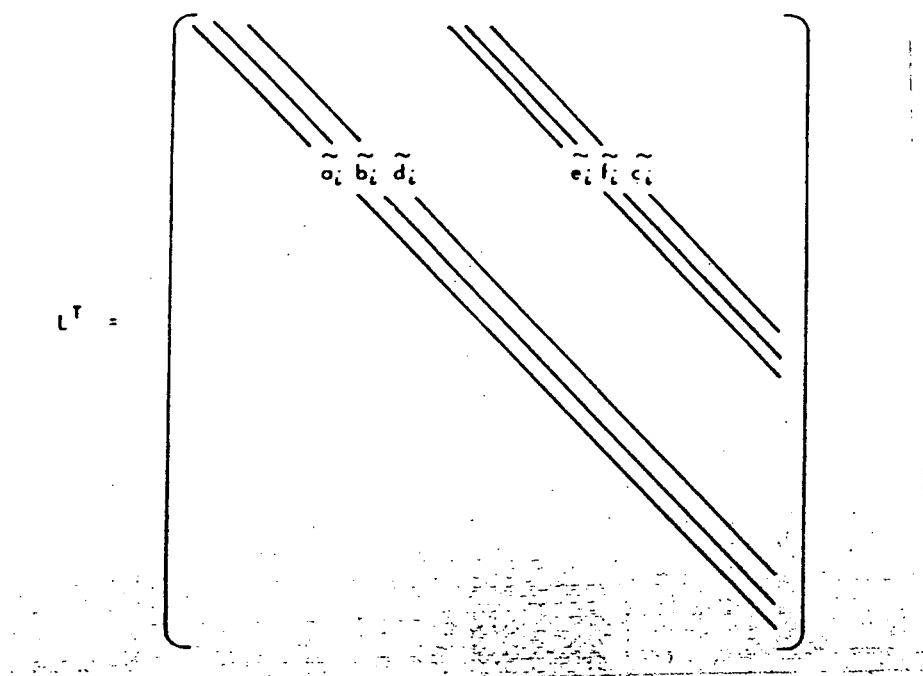


Figura 3.9. - Matriz de pré-condicionamento

A forma de se calcular os termos da matriz L , já foi visto anteriormente.

Uma alternativa interessante, por nós utilizada, que constitui uma variante desta 2ª forma, consiste em calcular todos os termos do pré-condicionamento, nas posições onde temos termos não nulos de A , o que nos possibilita utilizar o mesmo arranjo "INDIC" de endereçamento para a matriz de pré-condicionamento.

O algoritmo do método ICCG, é semelhante ao método dos gradientes conjugados, e é dado a seguir [7].

- Escolhe-se um valor inicial X_0 , que é uma aproximação de X .
- Calcula-se

$$r_0 = b - AX_0 \quad , \quad \rho_0 = (LL^T)^{-1} r_0 \quad (3.32)$$

- Para $i = 0, 1, 2 \dots$

$$\alpha_i = \frac{(r_i, [LL^T]^{-1} r_i)}{(\rho_i, A \rho_i)} \quad (3.33)$$

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i \rho_i \quad (3.34)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A \rho_i \quad (3.35)$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, [LL^T]^{-1} r_{i+1})}{(r_i, [LL^T]^{-1} r_i)} \quad (3.36)$$

$$\rho_{i+1} = [LL^T]^{-1} r_{i+1} + \beta_i \rho_i \quad (3.37)$$

Maiores explicações sobre o método ICCG, podem ser obtidas nas referências [3], [7].

3.5. Testes sobre as Performances dos Métodos

Nesta sessão faremos uma análise dos diversos tipos de métodos descritos nas sessões anteriores.

Devido às controvérsias existentes entre os métodos iterativos, abrangemos um domínio de casos grande, para que possamos eliminar estas controvérsias.

Apresentaremos os resultados em forma de tabelas comparativas e curvas, para facilitar a análise.

Todos os cálculos foram feitos em um micro-computador ITAUTEC-I-7000-XT, e os tempos envolvidos são relativos a este mi

cro-computador.

Todos os casos em duas dimensões foram obtidos do programa EFQAD que utiliza elementos triangulares de primeira ordem.

3.5.1. Os casos abordados

- Estrutura 1

Título: Equipamento aterrado

Problema do tipo: - Bidimensional

- Potencial Escalar

- Número de nós - 183

- Número de elementos - 267

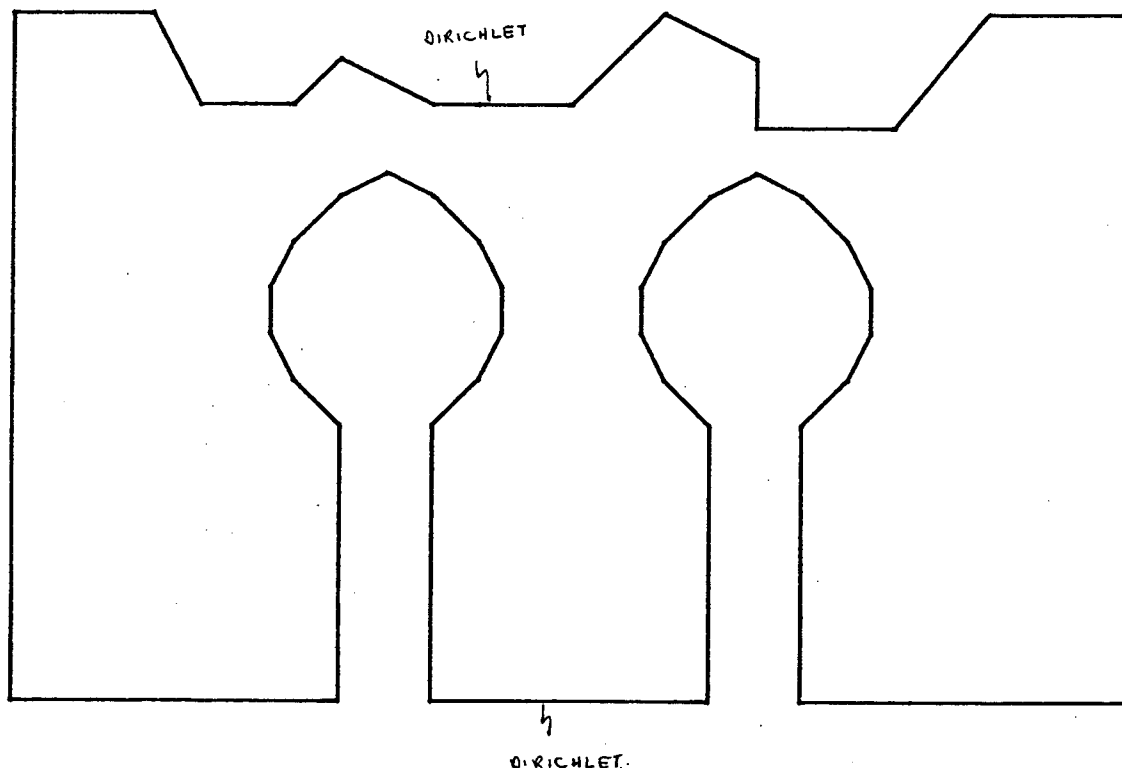


Figura 3.10. - Equipamento Aterrado

- Estrutura 2

Título: Rele

Problema do Tipo: - Bidimensional

- Potencial Vetor

- Número de nós - 194

- Número de elementos - 332

QUICKLET EM TORO O DOMÍNIO

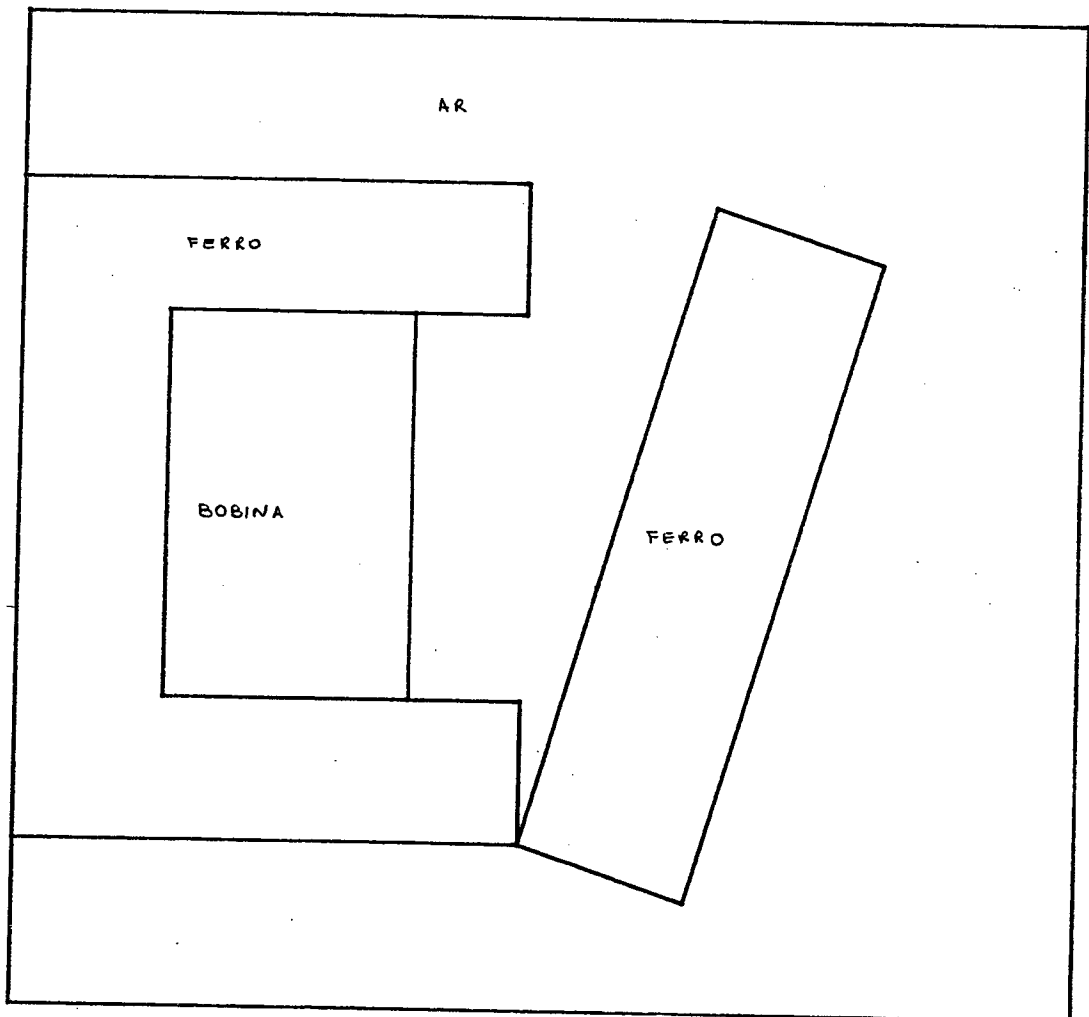


Figura 3.11. - Rele

- Estrutura 3

Título: Motor Indução Monofásico

Problema do Tipo: - Bidimensional

- Potencial Vetor

- Número de Nós - 270

- Número de Elementos - 488

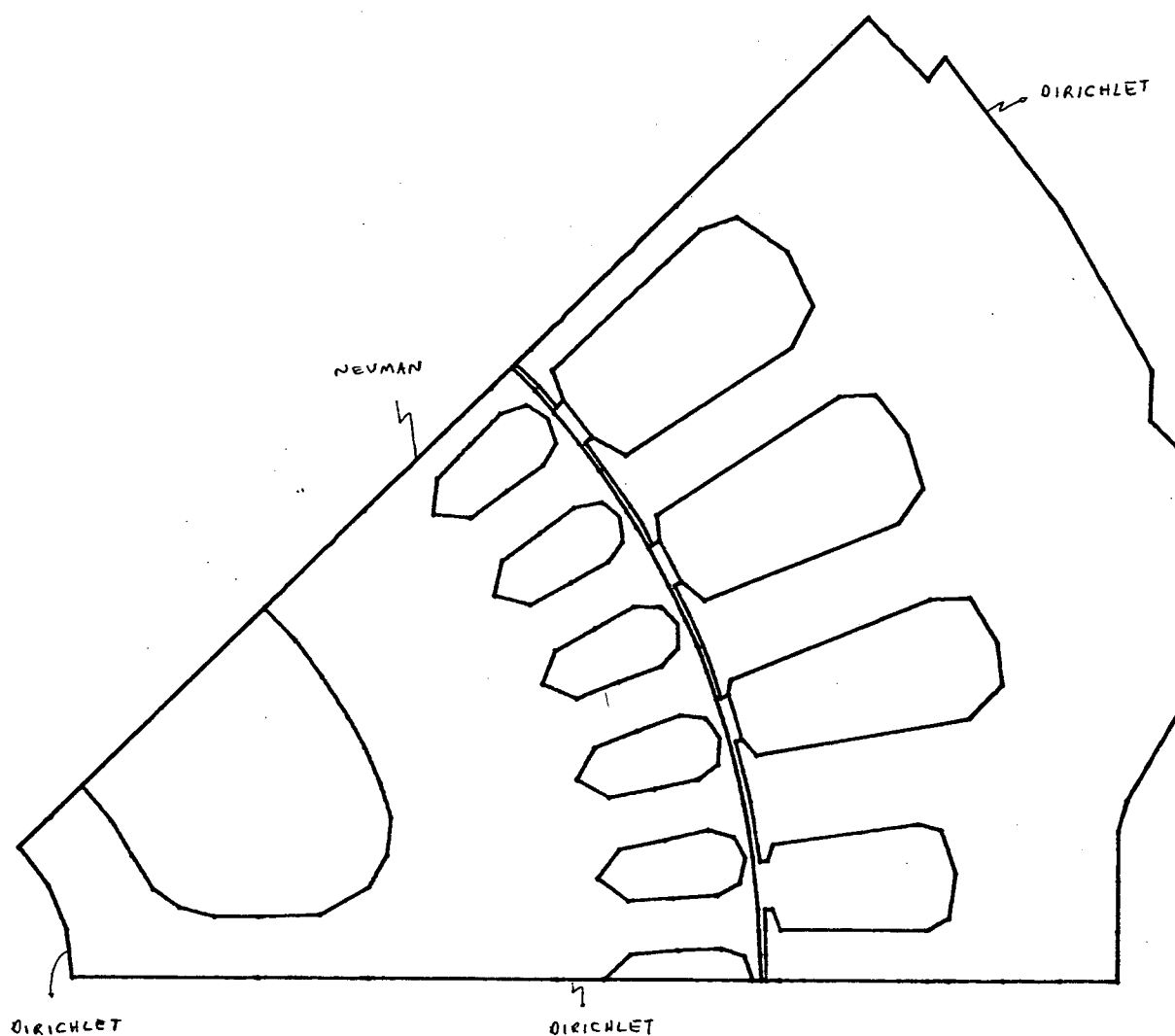


Figura 3.12. - Motor de Indução Monofásico (Parte)

Obs.: Os casos tridimensionais utilizam o elemento isoparamétrico a 8 nós.

- Estrutura 4

Título: Dentes de uma Máquina Elétrica I

Problema do Tipo: - Tridimensional

- Potencial Escalar

- Número de Nós - 448

- Número de Elementos - 242

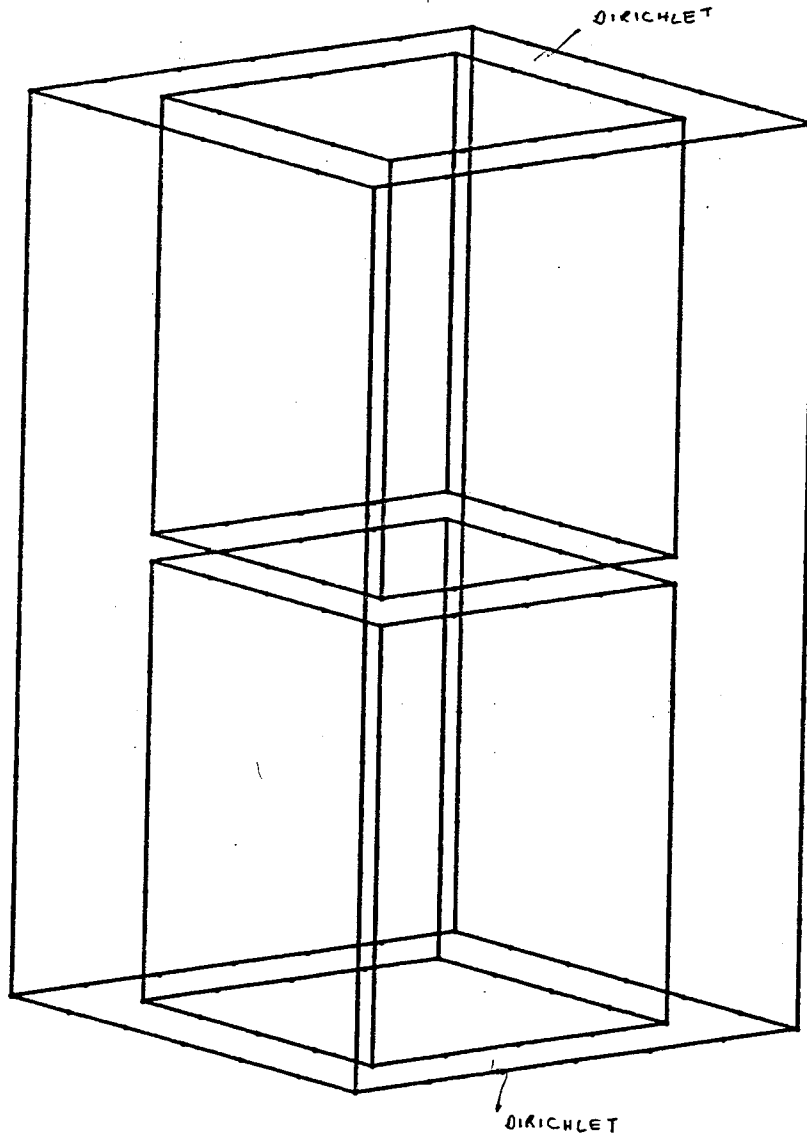


Figura 3.13. - Dente de uma Máquina Elétrica

- Estrutura 5

Título: Peça Móvel submetida a campos magnéticos

Problema do Tipo: - Tridimensional

- Potencial Escalar

- Número de Nós - 735

- Número de Elementos - 504

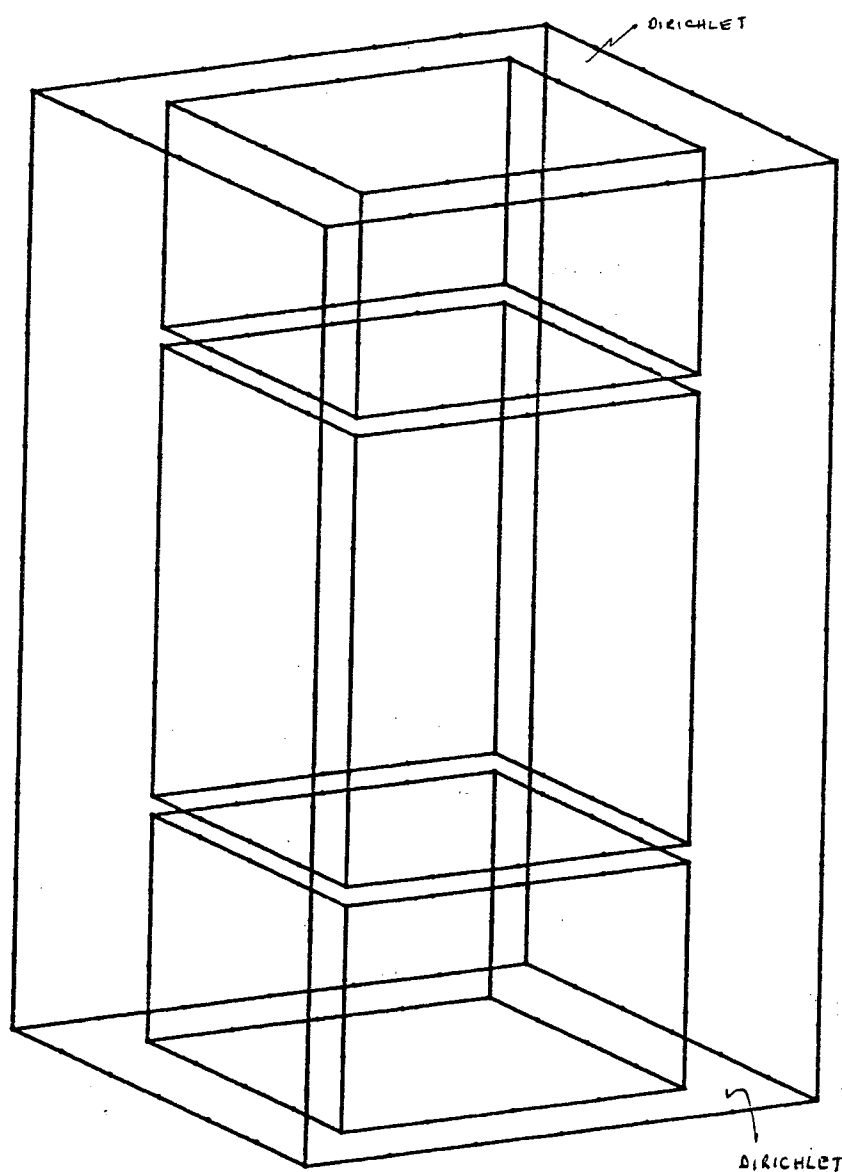


Figura 3.14. - Peça Móvel

- Estrutura 6

Título: Dentes de uma máquinas II

Problema do Tipo: - Tridimensional

- Potencial Escalar

- Número de Nós - 539

- Número de Elementos - 360

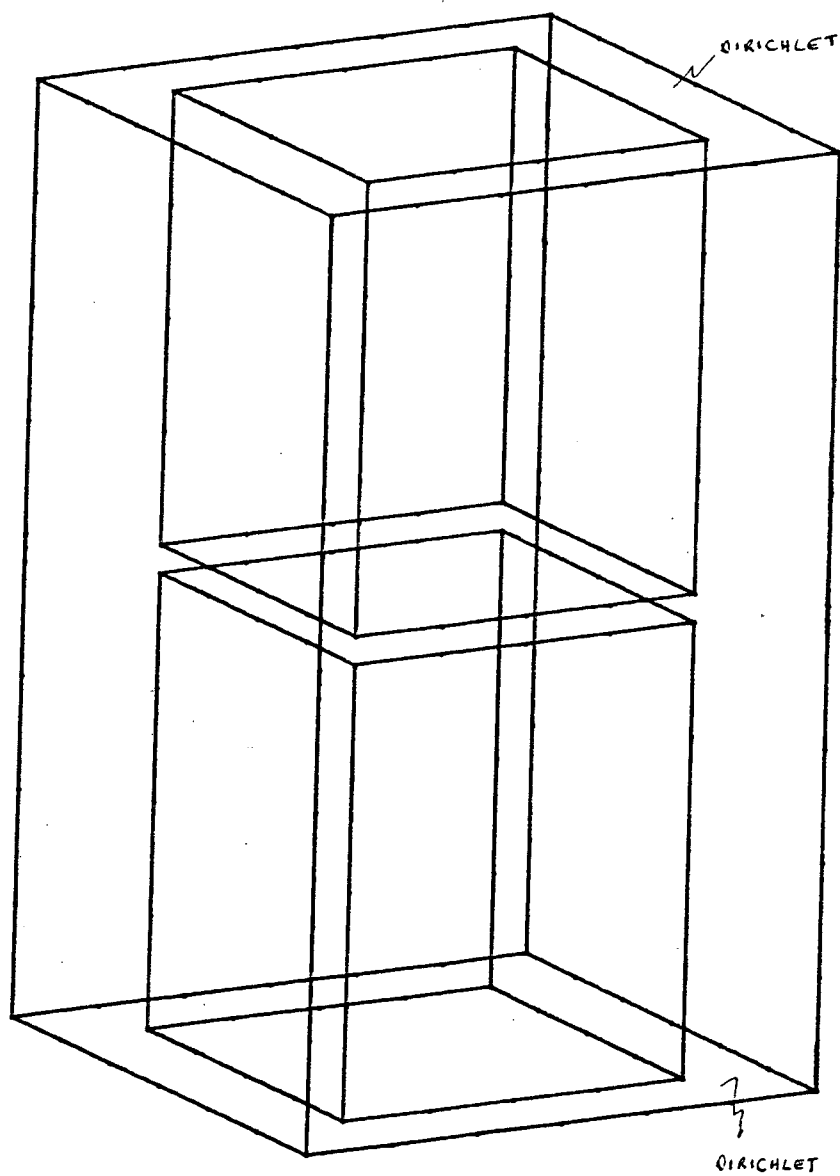


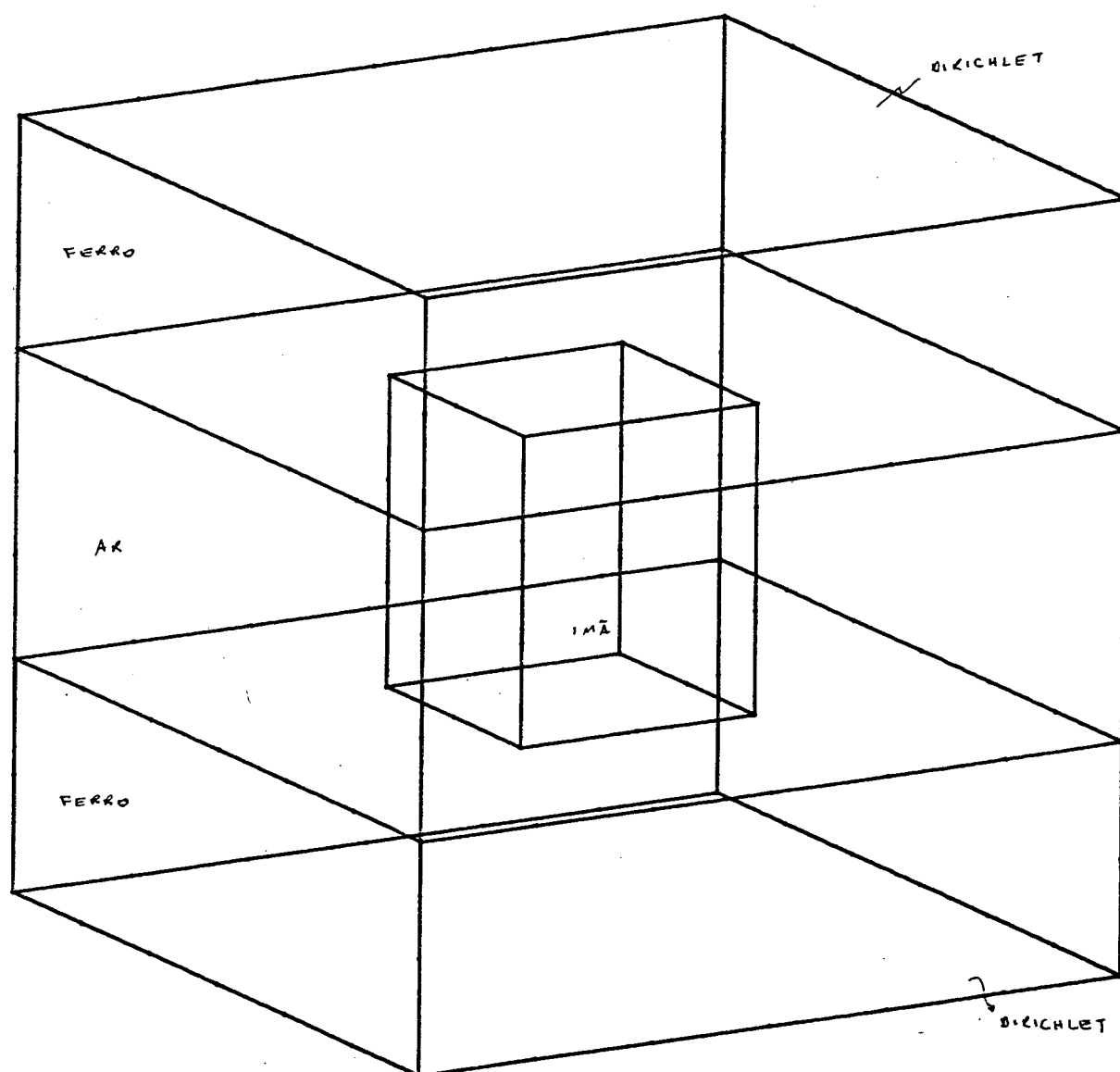
Figura 3.15. - Dente de uma Máquina Elétrica

- Estrutura 7

Título: Imã

Problema do Tipo: - Tridimensional

- Potencial Escalar, Imãs Permanentes
- Número de Nós - 392
- Número de Elementos - 252



. Figura 3.16 - Imã

- Estrutura 8

Título: Servo-Motor a imãs permanentes

Problema do Tipo: - Tridimensional

- Potencial Escalar, Imãs Permanentes

- Número de Nós - 648

- Número de Elementos - 448

Neumann em todo domínio

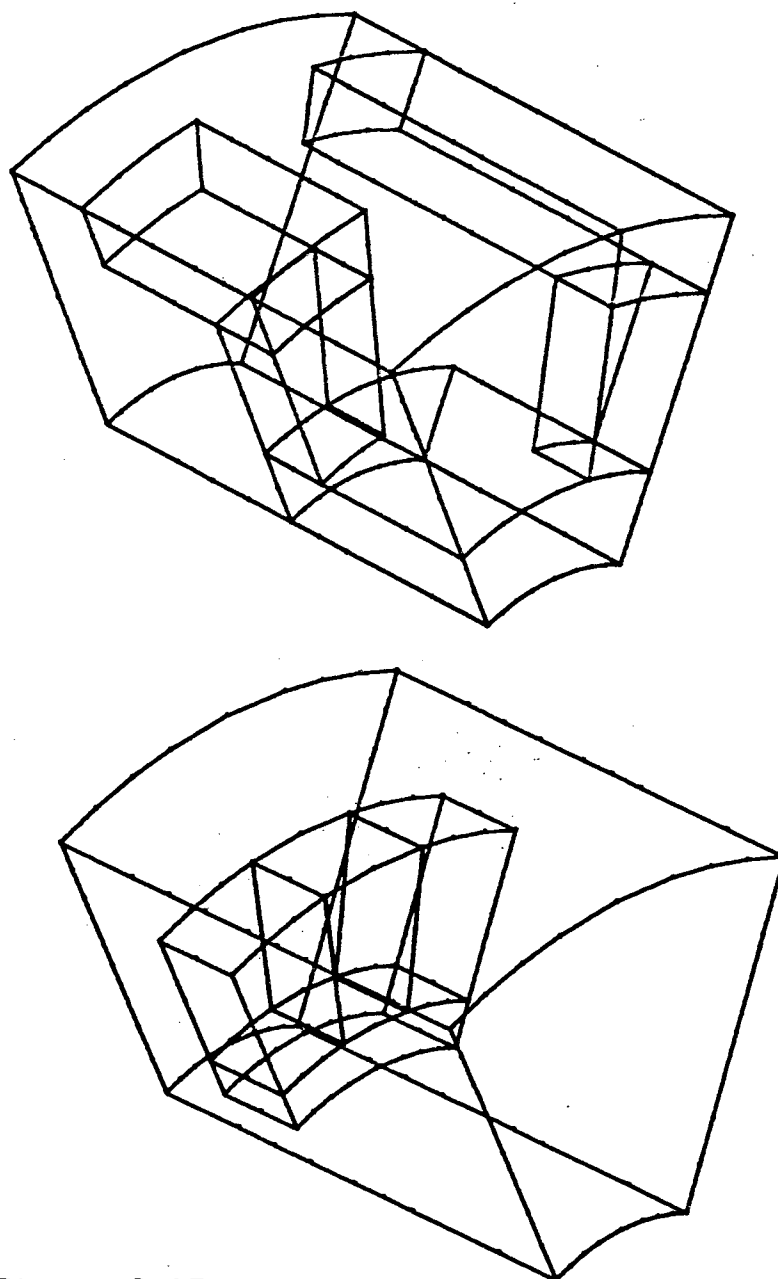


Figura 3.17 - Servomotor

3.5.2. Resultados Obtidos

A seguir temos a tabela comparativa dos tempos, e as curvas de convergência de algumas estruturas.

A. Tabela Comparativa dos Tempos

ESTRUTURA	NÚMOS	SOQUE RELAXAÇÃO			GRADIENTES CONVERGENTES			ICCG 2º TIPO			ICCG 1º TIPO			SAVVS	
		NÚMERO ÍTEM.	TEMPO	ERRO	NÚMERO ÍTEM.	TEMPO	ERRO	NÚMERO ÍTEM.	TEMPO	ERRO	NÚMERO ÍTEM.	TEMPO	ERRO	TEMPO	ERRO
1	183	51	51"	.511E-4	38	46"	.576E-4	25	36"	.136E-5	34	41"	.903E-7	17"	
2	130	NÃO	CONVERGIV		112	1'40"	.119E-5	20	29"	.653E-6	23	29"	.158E-4	12"	
3	210	NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		38"	
4	448	97	3'32"	.987E-4	143	7'47"	.518E-5	93	5'52"	.557E-6	124	6'38"	.714E-6	5'32"	
5 LINEAR	735	NÃO	CONVERGIV		226	21'37"	.588E-4	144	14'40"	.247E-6	412	31'28"	.377E-6	8'56"	
5 DATUZADA	735	NÃO	CONVERGIV		80	9'43"	.559E-5	74	15'	.407E-5	88	14'10"	.867E-5	8'56"	
6 LINEAR	539	112	5'40"	.105E-3	186	12'41"	.571E-5	103	8'2"	.609E-5	147	9'33"	.587E-6	4'27"	
6. SATUZADA	539	NÃO	CONVERGIV		76	6'42"	.833E-5	44	8'31"	.687E-5	65	8'50"	.618E-5	4'27"	
7	392	22	40"	.251E-4	37	1'46"	.477E-4	10	2'	.739E-4	13	2'4"	.216E-4	2'36"	
8	648	NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		NÃO	CONVERGIV		8'10"	

O erro utilizado na tabela é uma medida de convergência.

Figura 3.18. - Tabela Comparativa

De acordo com a tabela, nós tiramos algumas conclusões:

- O método direto, é o mais rápido.
- Entre os métodos iterativos, o método de sobrerelaxação, mostra-se um método que apresenta uma velocidade de convergência maior, mas a sua convergência nem sempre é garantida.
- O método ICCG 2º tipo, (vide Cap.3, sessão 3.4.2.3), tem uma velocidade de convergência boa, uma melhor precisão.
- A velocidade de convergência esperada do método ICCG foi baixa em relação ao esperado.
- Nenhum dos métodos iterativos converge em estruturas em que existam muitas condições de Neumann, como é o caso da estrutura 8, e no caso de máquinas elétricas com pequeno entreferro, como é o caso da estrutura 3.

B. Curvas de Convergência

Serão usados os seguintes códigos para as curvas de convergência:

- A - ICCG 2º Tipo (Vide Cap. 3, sessão 3.4.2.3)
- B - ICCG 1º Tipo (Vide Cap. 3, sessão 3.4.2.3)
- C - Gradientes Conjugados (Vide Cap.3, sessão 3.4.2.2)
- D - Sobrerelaxação (Vide Cap. 3, sessão 3.4.2.1)

* Observação de curvas de convergência não possuem a mesma escala.

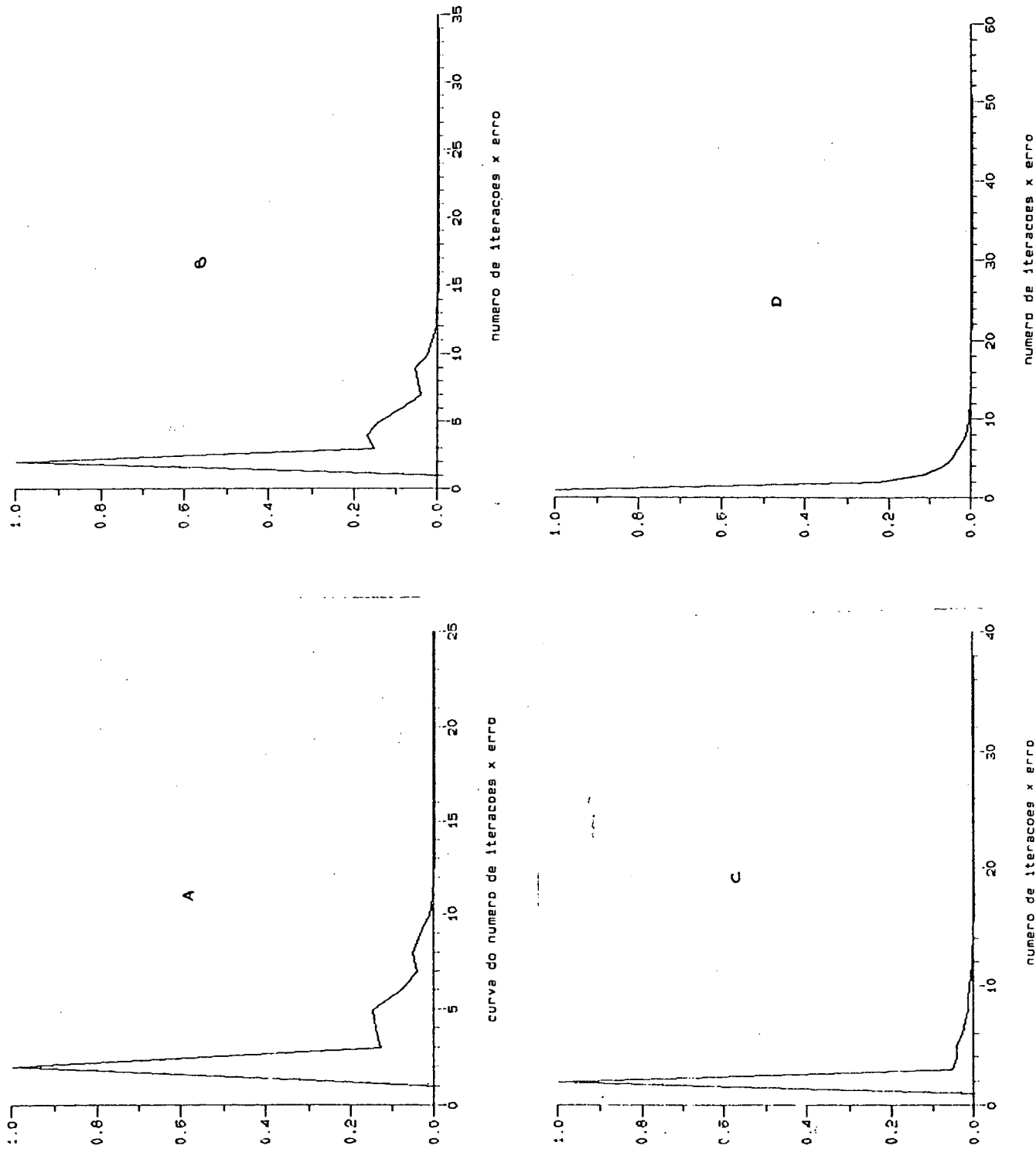


Figura 3.19. - Curvas de Convergência da Estrutura 1

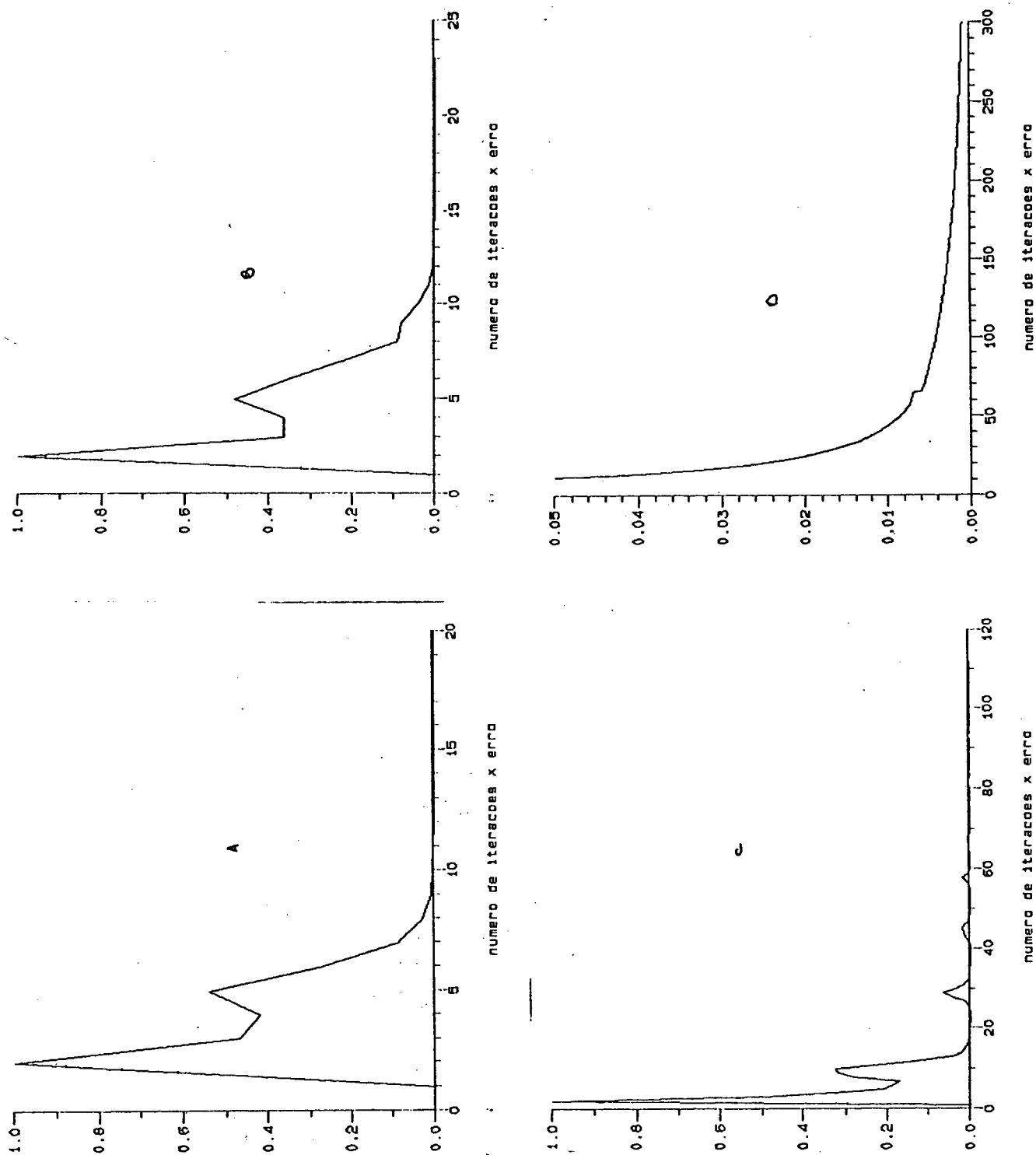


Figura 3.20. - Curvas de Convergência da estrutura 2.

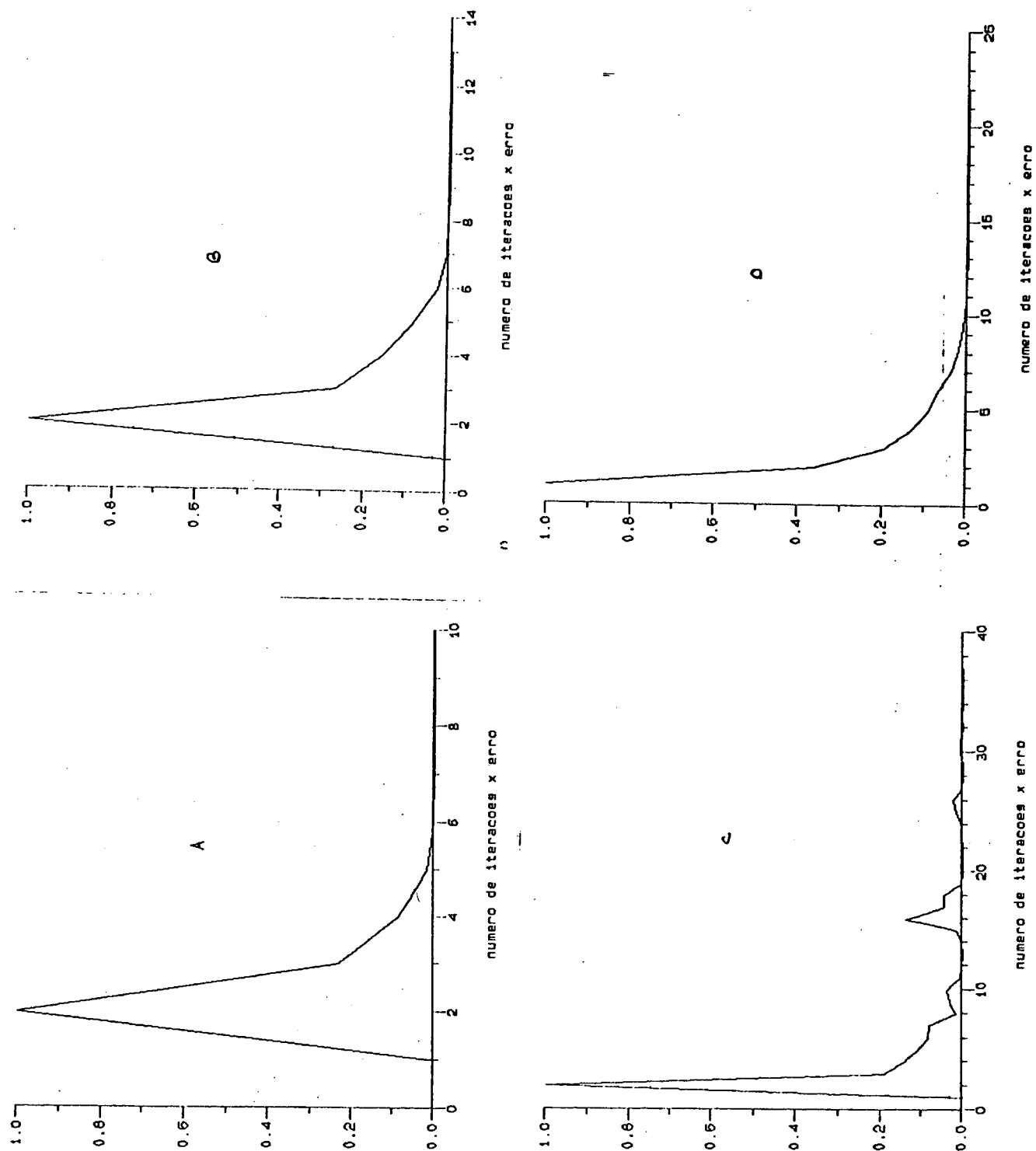


Figura 3.21. - Curvas de Convergência da Estrutura 7

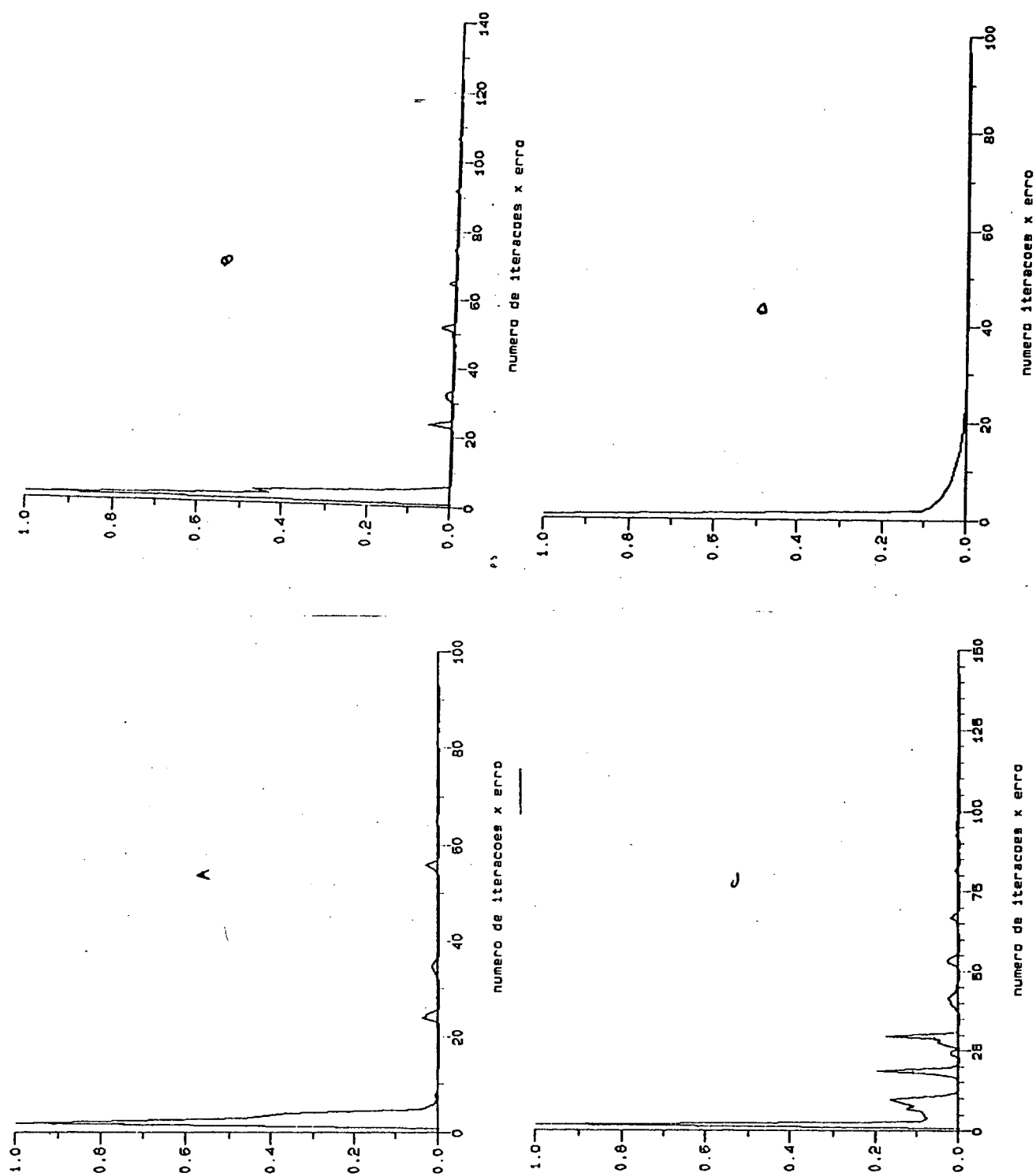


Figura 3.22. - Curvas de Convergência da Estrutura 4

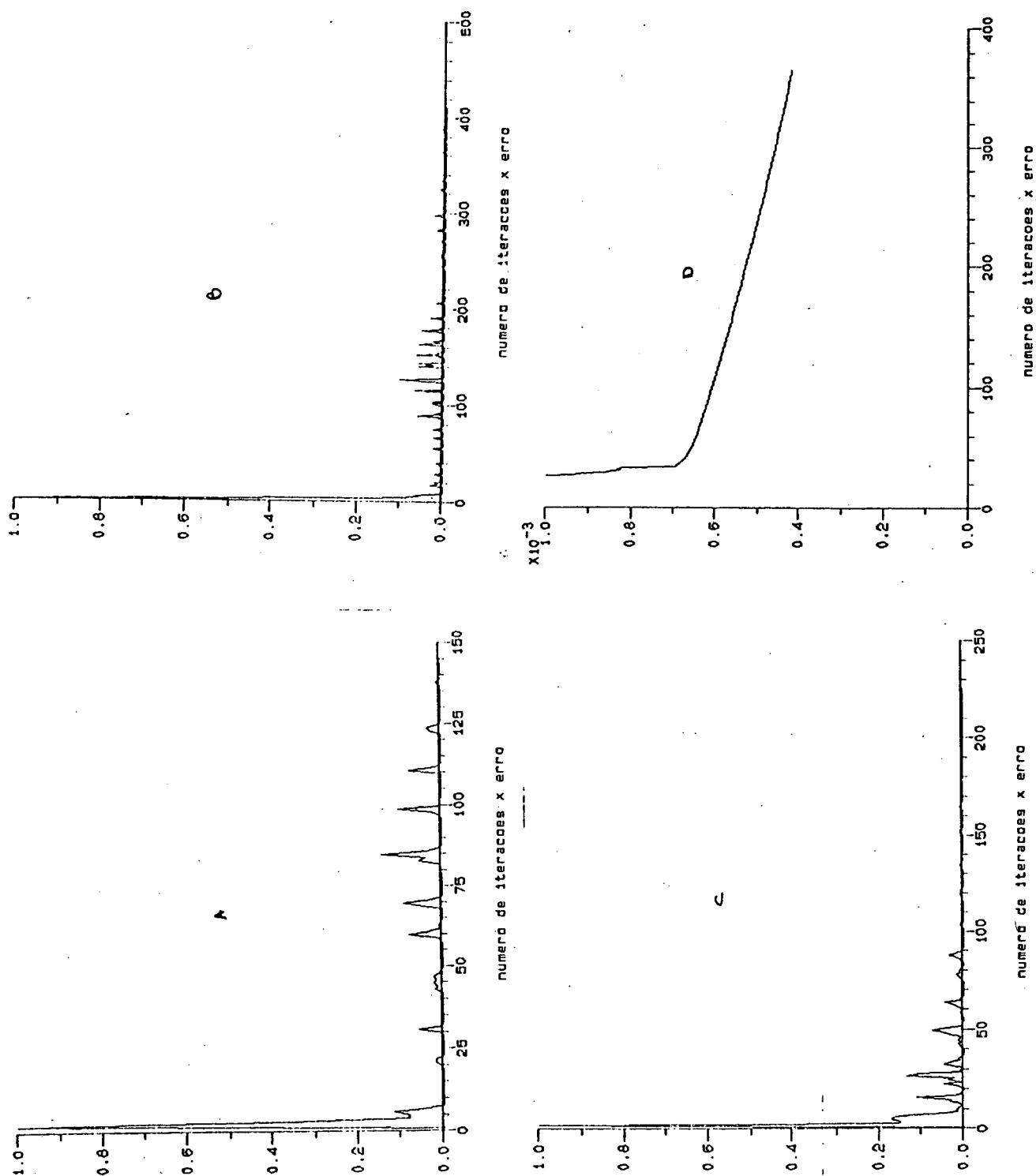


Figura 3.23. - Curvas de Convergência da Estrutura 5 - Linear

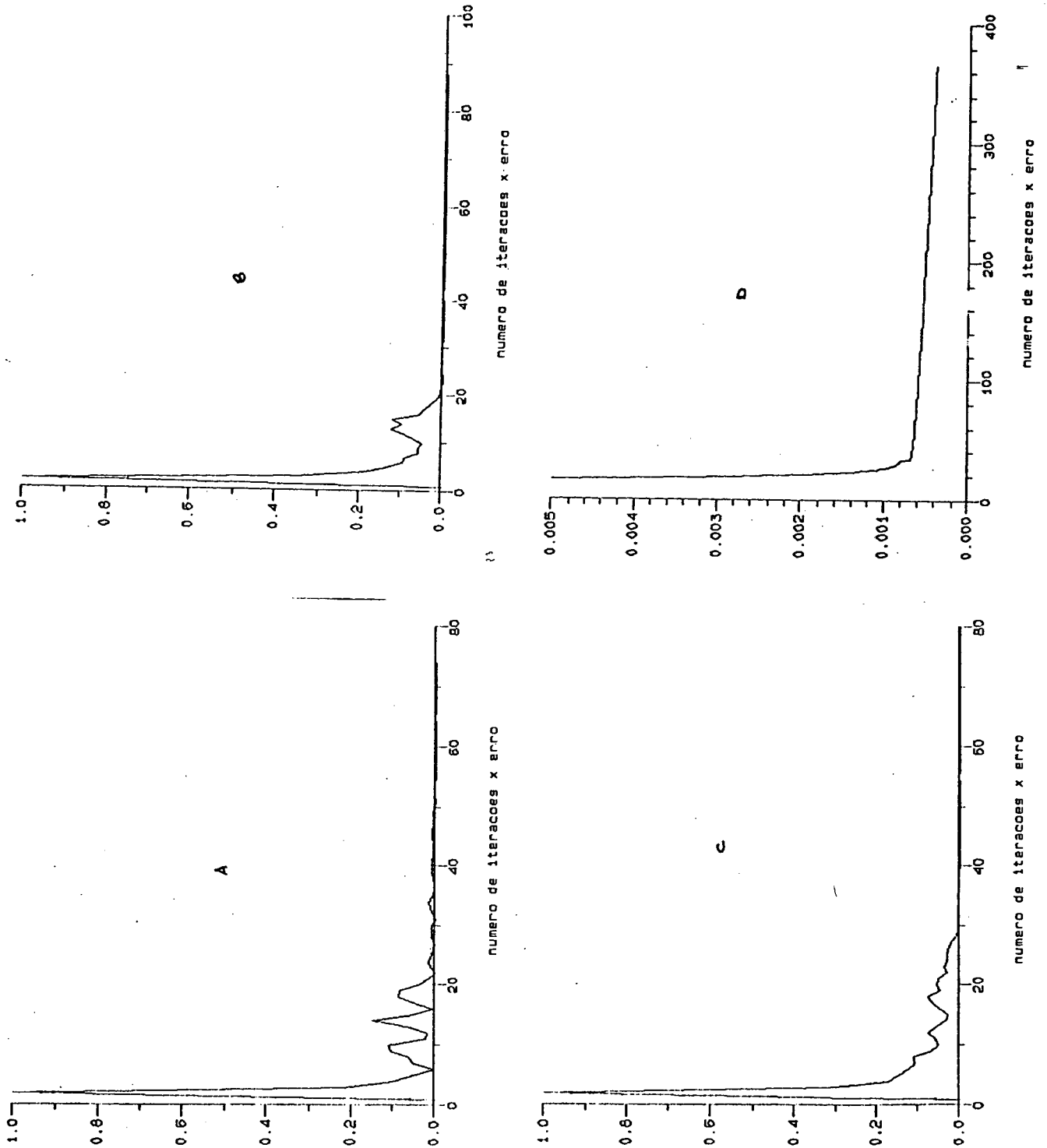


Figura 3.24. - Curvas de Convergência da Estrutura 5 - Saturada

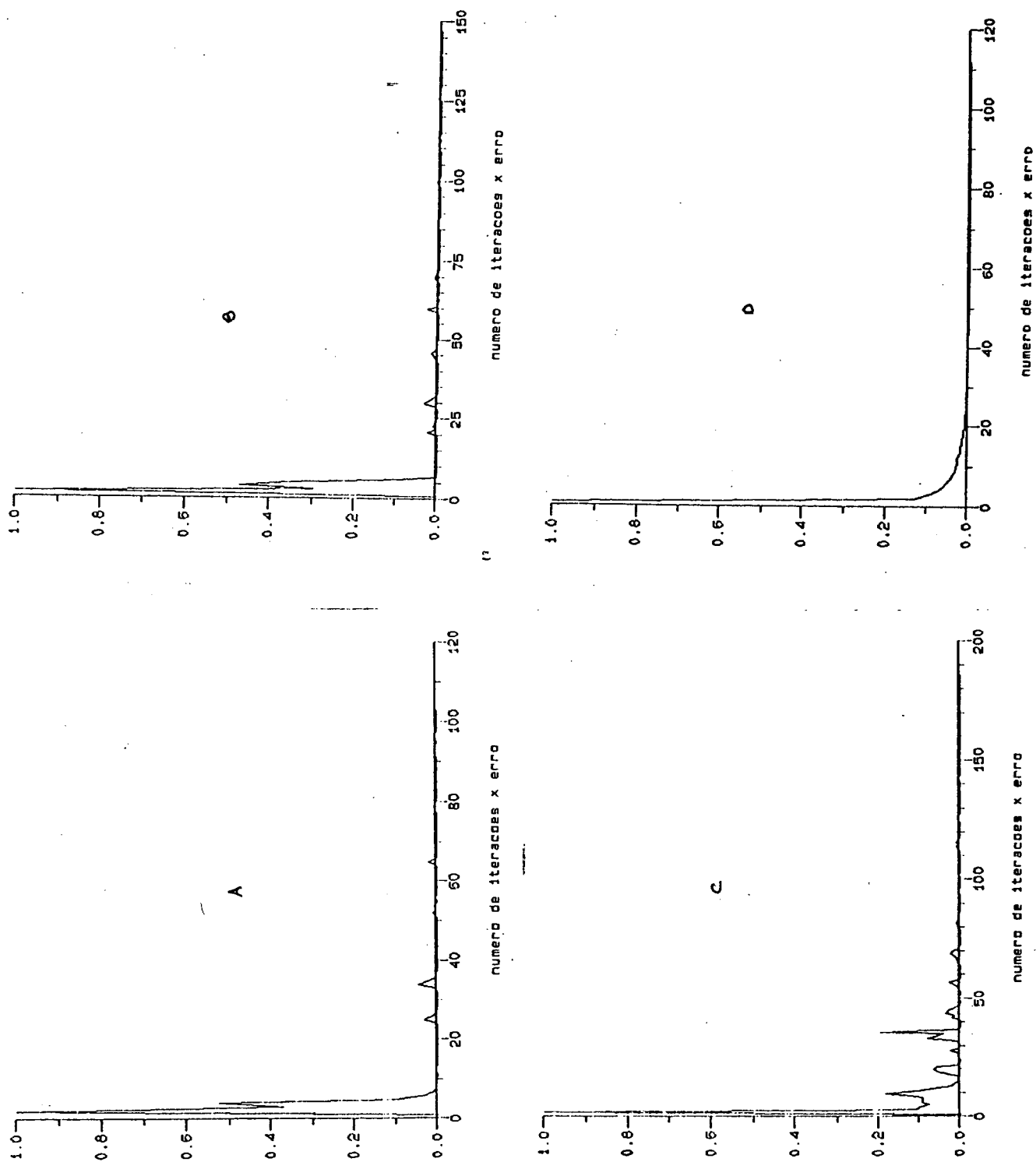


Figura 3.25. - Curvas de Convergência da Estrutura 6 - Linear

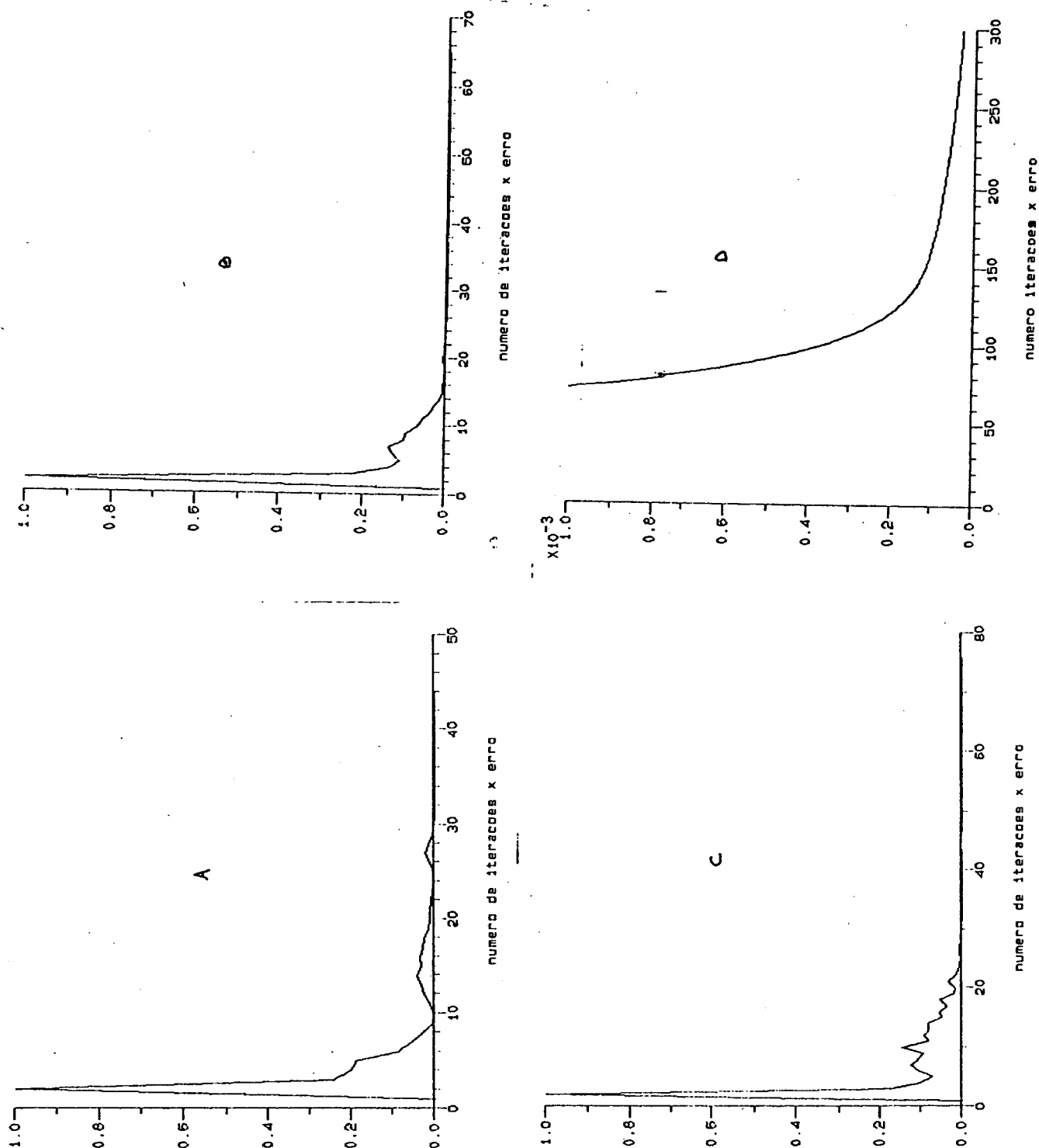


Figura 3.26. - Curvas de Convergência da Estrutura 6 - Saturada

De acordo com as curvas de convergência, podemos tirar as seguintes conclusões:

- Nota-se que no geral o método ICCG 2º Tipo (Vide Cap.3, sessão 3.4.2.3), tem uma oscilação menor entre os métodos ICCG 1º Tipo (Vide Cap.3, Sessão 3.4.2.3) e o método dos gradientes conjugados, isto pode ser devido ao pré condicionamento das matrizes.
- O método de sobrerelaxação tem uma curva de convergência, muito estável.
- O método ICCG 2º Tipo, apresenta um menor número de iterações para chegar a convergência.

3.6. Conclusão

Até bem pouco tempo atrás, imaginava-se que os métodos iterativos eram os melhores adaptados aos grandes sistemas de equações lineares. Essa afirmação não é de toda verdade, pois devido aos problemas de convergência dos métodos iterativos, as vezes é preferível utilizarmos um método direto. Por outro lado existem certos tipos de problemas em que os métodos iterativos fornecem uma solução muito boa, o que nos possibilita aumentar o nosso domínio de cálculo; pois podemos armazenar as matrizes na forma-compacta.

Esperava-se do método ICCG 2º Tipo, uma performance muito melhor do que a apresentada, o aumento da velocidade de convergência foi pouco significativo, o que em certos casos não justifica o trabalho computacional envolvido no método.

Em um sistema de cálculo o ideal é termos uma biblioteca de métodos de resolução de equações lineares, para que o operador através de sua experiência, escolha o método ideal para um determinado tipo de estrutura.

CAPÍTULO 4

O SISTEMA INFORMÁTICO SCAD-3D

4.1. Introdução

O cálculo de campos magnéticos e elétricos através da técnica de elementos finitos, tornou-se atualmente imprescindível na concepção e análise de dispositivos eletromagnéticos.

Um sistema informático capaz de realizar o cálculo de campos elétricos e magnéticos, é modernamente composto de tres partes, quais sejam:

- O sistema pré-processador cujos objetivos são de inicialmente captar os dados geométricos e as propriedades físicas dos diversos materiais que compõe o dispositivo eletromagnético a ser estudado, e após a discretização, ou seja, a geração da malha.
- O sistema processador, que é responsável pelo cálculo através da técnica de elementos finitos.
- O sistema pós-processador, que deverá nos fornecer os resultados numéricos e gráficos, para efetuarmos, a análise eletromagnética do dispositivo.

O sistema SCAD-3D é baseado no esquema apresentado na figura 4.1.

Cabe salientar que o sistema SCAD-3D é um sistema informático derivado de um sistema de cálculo de campos elétricos e magnéticos em tres dimensões existente no Grupo de Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos da UFSC.

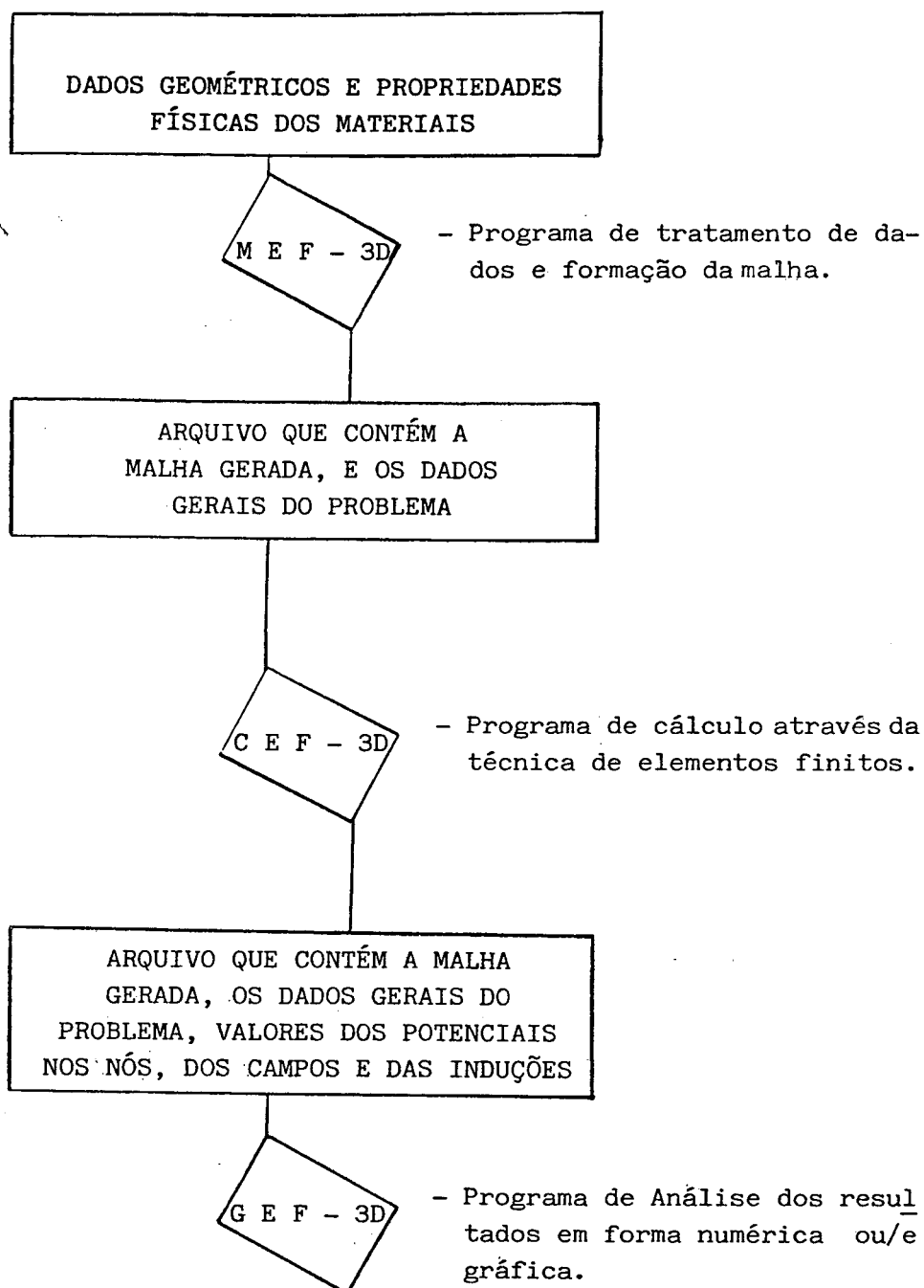


Figura 4.1. - Esquema Básico do Sistema SCAD-3D

Na primeira parte deste capítulo, iremos descrever as características do sistema SCAD-3D, na sua composição atual, e no final comentaremos alguns exemplos de cálculo usando este sistema.

4.2. O Programa MEF-3D

O programa MEF-3D é o programa pré-processador do sistema SCAD-3D.

Neste programa é feita a entrada dos dados geométricos do problema, e das características físicas dos materiais que compõe a estrutura. Após o tratamento desses dados o programa gera a malha, que é armazenada num arquivo, juntamente com os dados gerais do problema, que são necessários para o cálculo, utilizando a técnica de elementos finitos.

A árvore do programa MEF-3D é a seguinte, conforme figura abaixo:

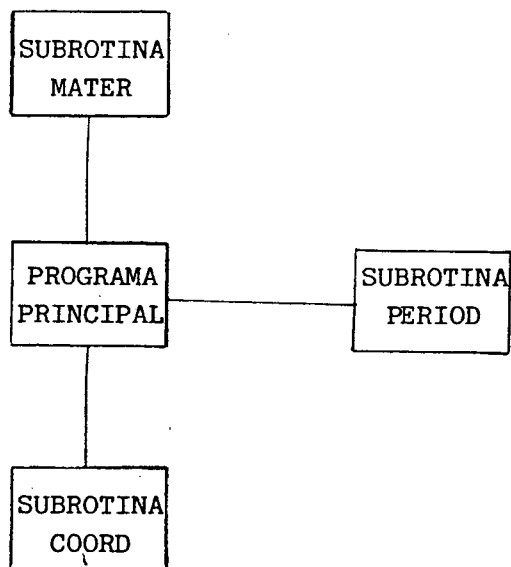


Figura 4.2. - Árvore do Programa MEF-3D

A convenção utilizada para referenciar topologicamente os elementos finitos no programa é feita conforme figura abaixo:

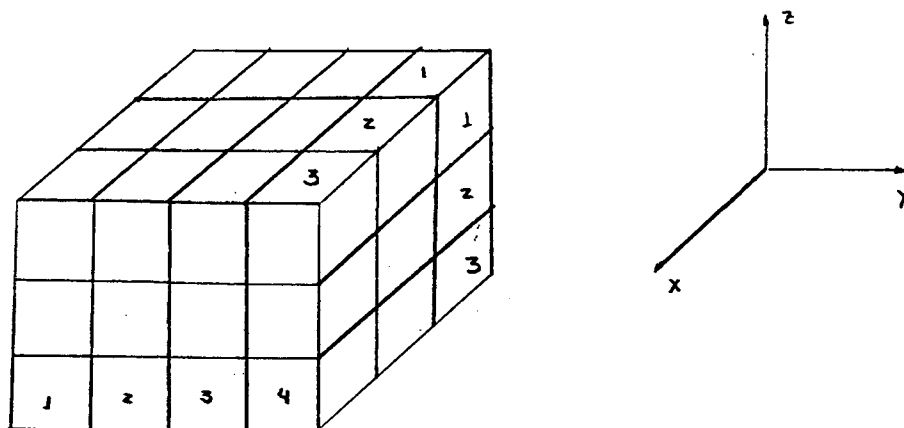


Figura 4.3. - Convenção usada para referenciar os elementos finitos

Conforme podemos visualizar na figura 4.2 o programa MEF-3D, é composto de um programa principal e de tres subrotinas.

- O programa principal é responsável pela entrada de dados, que são os abaixo citados:
- Número de camadas em x,y,z e as dimensões do domínio.
- Número de meios e as características físicas dos meios.
- Número de condições de contorno e os seus valores.

Se a estrutura tiver uma geometria de grande irregularidade, devemos fornecer as diferentes sub-regiões, que uma a uma compostas formarão o domínio de cálculo.

No caso contrário, existem uma série de facilidades que simplificam de maneira significativa a entrada de dados.

O programa questiona o utilizador se no domínio de estu-

do há periodicidade e se existem imãs-permanentes no problema.

Existe no programa a possibilidade de entrada de dados para um problema dito "ANGULAR", o que nos possibilita fazer a análise de dispositivos eletromagnéticos que sejam cilíndricos, como por exemplo um trecho de máquina elétrica, conforme figura abaixo:

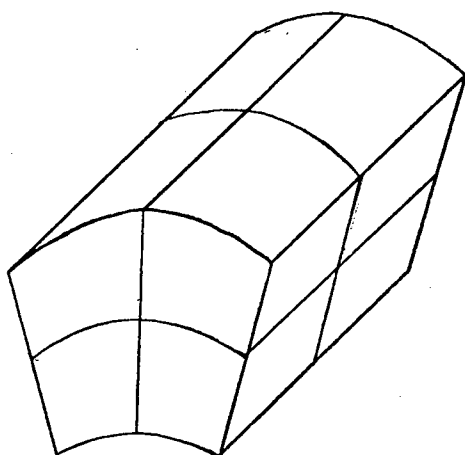


Figura 4.4. - Trecho de uma máquina elétrica

O programa é conversacional, o que faz com que a entrada de dados seja bem cômoda, e que permite correções durante a entrada.

- A subrotina MATER define as características dos materiais em cada elemento finito do domínio.
- A subrotina PERIOD é responsável pela criação dos pares de nós periódicos quando for o caso.
- A subrotina COORD é responsável pelo cálculo das coordenadas dos nós, para a geração da malha.

A formação dos elementos da malha (explicitação dos nós que envolvem os elementos) é feita no programa principal.

4.3. O Programa CEF-3D

O programa de cálculo é o principal módulo do sistema, pois é nele que é aplicada a técnica de elementos finitos para o cálculo dos campos no domínio de estudo.

O programa CEF-3D permite o cálculo de campos em problemas do tipo:

- Eletrostático
- Magnetostático
- Magnetostático com imãs permanentes.

O problema, na sua versão atual, trata problemas lineares, e a técnica numérica empregada está descrita no capítulo 2.

As principais variáveis do programa são:

- KNO - número de nós do problema.
- KEL - número de elementos do problema.
- MAXBAN - vetor da máxima largura de banda (para métodos diretos de resolução de eqs. lineares).
- VV(KNO) - vetor de potenciais desconhecidos.
- VDR(KNO) - vetor independente, ou vetor situado no lado direito do sistema matricial, onde são inseridas as condições de contorno, e os termos ocorrentes da influência dos imãs permanentes.
- SS(KNO,MAXBAN) - matriz global de contribuições para problemas com resolução através de métodos diretos.

Existe também uma versão do programa, que utiliza métodos iterativos; os arranjos utilizados são basicamente os mesmos;

somente "SS" será modificado e teremos a inclusão do arranjo "INDIC", como abaixo:

- SS(KNO, 15) - matriz global de contribuições na forma compacta.
- INDIC(KNO, 14) - matriz de endereçamento dos termos da matriz SS.

A árvore principal do programa está mostrada na figura abaixo:

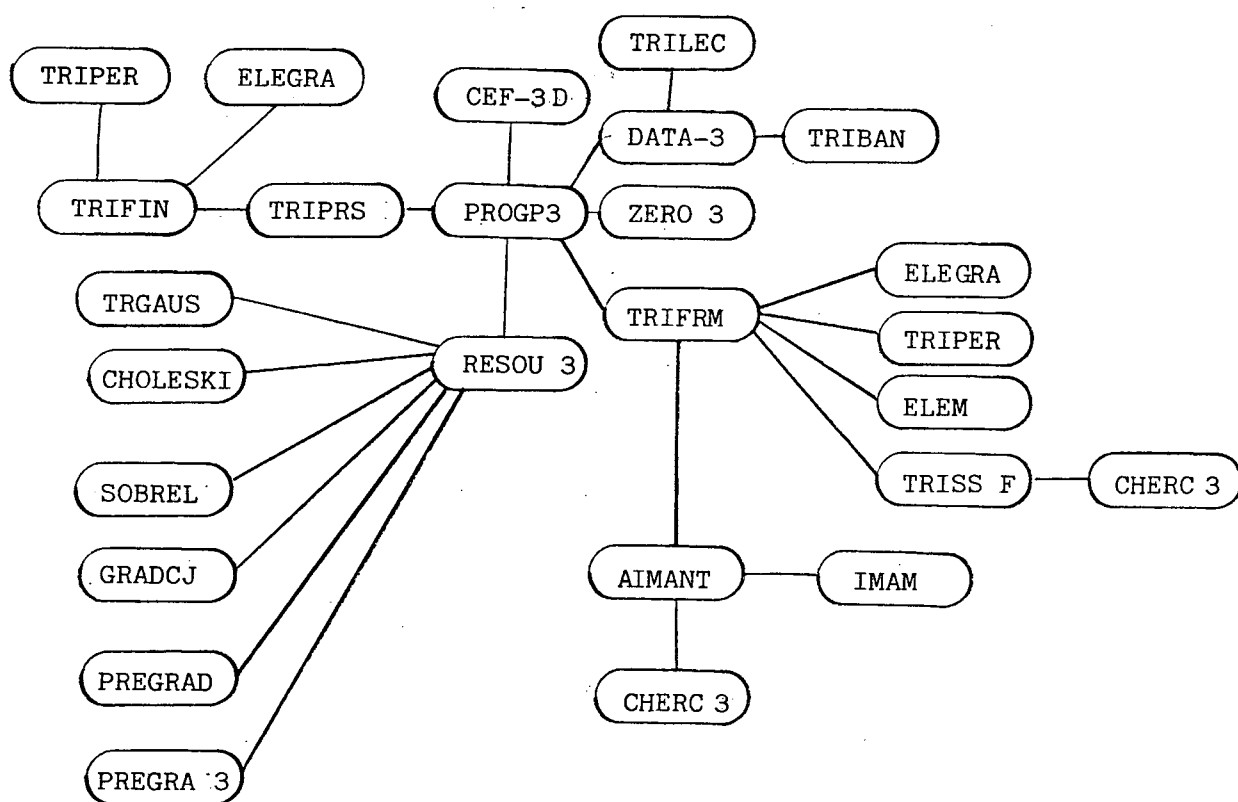


Figura 4.5. - Árvore principal do programa CEF-3D

Podemos notar que a estrutura do programa de cálculo é relativamente complexa, e por isso descreveremos com mais ênfase, apenas as subrotinas principais do programa.

- Subrotina PROGP3 - é o programa principal propriamente

dito, cujo principal objetivo é gerenciar todas as operações principais, através das subrotinas que compõe o programa CEF-3D.

- Subrotina DATA 3 - é a subrotina de entrada de dados , obtidos do arquivo gerado pelo programa MEF-3D.
- Subrotina TRILEC - Lê em disco a malha gerada pelo MEF-3D.
- Subrotina TRIBAN - calcula a largura de banda.
- Subrotina TRIFRM - forma a matriz SS de contribuições global.
- Subrotina ELEGRA - calcula os gradientes.
- Subrotina TRIPER - calcula a permeabilidade em função dos gradientes.
- Subrotina ELEM - Cálculo da matriz de contribuição g (Ver Cap. 2).
- Subrotina TRISSF - condensa as matrizes g em SS.
- Subrotina AIMANT - condensa no vetor VDR os termos relativos aos imãs.
- Subrotina IMAMM - calcula a contribuição elementar dos imãs.
- Subrotina COINI3 - insere as condições de contorno.
- Subrotina CHERC3 - pesquisa os nós periódicos.
- Subrotina NULPE3 - elimina os nós periódicos.
- Subrotina RESOU3 - chama as subrotinas de resolução de equações lineares.

- Subrotina TRGAUS - resolução através do método de Gaus.
- Subrotina CHOLESKI - resolução através do método de Choleski.
- Subrotina SOBREL - resolução através do método de sobrerelaxação.
- Subrotina GRADCJ - resolução através do método dos gradientes conjugados.
- Subrotina PREGRAD - resolução através do método ICCG - Toda matriz.
- Subrotina PREGRAD3 - resolução através do método ICCG - Matriz parcial.
- Subrotina TRIPRS - gravação em arquivo dos potenciais, dos campos e induções.

Vamos detalhar agora, as principais subrotinas do programa CEF-3D.

A - Subrotina TRIFRM

A subrotina principal do programa é a subrotina TRIFRM; é nela que são feitos os cálculos necessários para a formação da matriz [SS].

Seus principais arranjos são:

- EETRI(8,8) - Matriz de contribuições 8 x 8.
- COORD(8,3) - Matriz de coordenadas dos nós de um elemento.
- VVG(8) - Vetor dos potenciais nos nós, envolvendo o elemento.

Além dos arranjos VV, SS etc ..., descritos no início desta sessão.

O seu fluxograma está representado na figura abaixo:

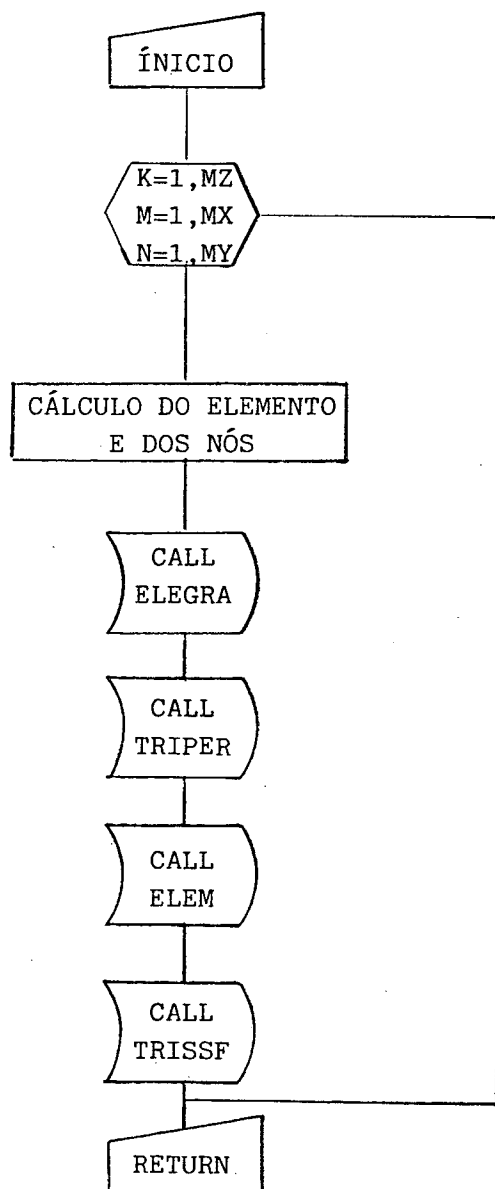


Figura 4.6. - Fluxograma da subrotina TRIFRM

B - Subrotina ELEM

É na subrotina ELEM que é feito o cálculo da matriz de contribuições (8x8). Esta subrotina calcula as contribuições relativas aos elementos finitos isoparamétricos, utilizando a integração numérica de Gauss.

As principais variáveis do programa são:

$g(8,8)$ - Matriz de contribuições 8×8 .

$DEVRST(3,8)$ - Matriz das derivadas das funções de interpolação.

$VJAC(3,3)$ - Matriz do Jacobiano.

$VJACIN(3,3)$ - Matriz do Jacobiano inversa.

$B(3,8)$ - Matriz das derivadas em X,Y,Z.

$DETJAC$ - Determinante do Jacobiano.

Estas variáveis são resultados da teoria do capítulo 2 sessão 2.5.

O fluxograma da subrotina é o seguinte, conforme figura abaixo:

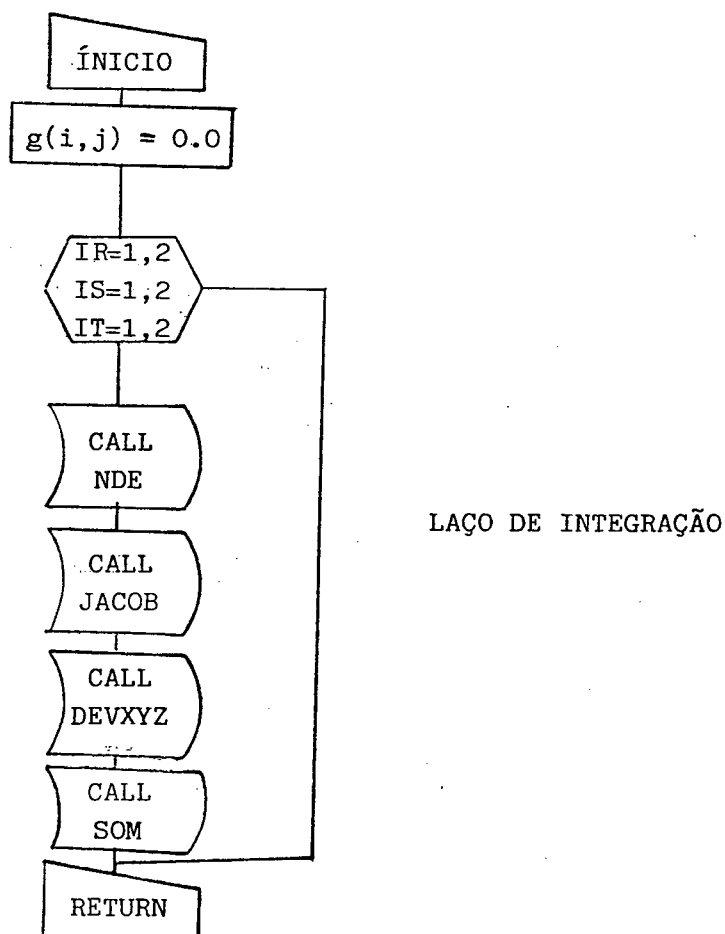


Figura 4.7. - Fluxograma da subrotina ELEM

Este fluxograma é resultado do algoritmo para cálculo da matriz de contribuições, mostrado no capítulo 2, sessão 2.8.

Nesta subrotina temos ainda outras subrotinas complementares que são:

- Subrotina NDE - Esta subrotina realiza o cálculo das derivadas no sistema de referência R,S,T, nos oito pontos de integração, no sistema de referência R,S,T, onde R,S,T são respectivamente ξ , η , ζ , conforme capítulo 2, sessão 2.5.1.
- Subrotina JACOB- Esta subrotina calcula a matriz do jacobiano, o determinante do jacobiano, e a inversa do jacobiano, nos oito pontos de integração, conforme capítulo 2, sessão 2.5.3.
- Subrotina DEVXYZ - Subrotina de passagem do problema em coordenadas R,S,T, para X,Y,Z, através da matriz B, nos oito pontos de integração, conforme capítulo 2, sessão 2.5.2.1.
- Subrotina SOM - Subrotina de soma das matrizes parciais de contribuição, calculadas nos oito pontos de integração, o resultado da soma é a matriz g de contribuições, conforme capítulo 2, sessão 2.5.2.2.

É importante observar que a subrotina ELEM é a responsável, por um dos principais cálculos do programa, ou seja, o cálculo da matriz g de contribuições (8x8), resultado da soma das 8 matrizes parciais, relativas aos pontos de integração R,S,T, atra

vés das subrotinas NDE, JACOB, DEVXYZ e SOM.

C - Subrotina ELEGRA

A subrotina ELEGRA é a subrotina responsável pelo cálculo dos gradientes. O procedimento de cálculo é identico ao utilizado na subrotina ELEM.

São então, utilizadas as mesmas subrotinas de cálculo das derivadas nos pontos de integração, do cálculo do Jacobiano, do determinante do Jacobiano e da sua inversa, e do cálculo das derivadas em X,Y,Z.

A mudança se encontra no cálculo da matriz dos gradientes.

Para o cálculo dos gradientes precisamos dos valores dos potenciais nos nós; com estes valores, faz-se a multiplicação da matriz B gerada pela subrotina DEVXYZ, pelos valores dos potenciais, acumulando em um vetor de gradientes, as multiplicações parciais nos oito pontos de integração, conforme podemos verificar pelo algoritimo do capítulo 2, sessão 2.8.

Observando o que foi exposto até este momento, nós podemos notar que o programa de cálculo, utilizando a técnica de elementos finitos, é uma tarefa de delicada realização na confecção do programa, devem ser observados os métodos de armazenamento, a aplicação da técnica de integração numérica de Gauss para a formação das matrizes envolvidas no cálculo e os métodos de resolução dos sistemas de equações lineares.

Quanto a operacionalidade do programa CEF-3D, o mesmo na sua forma atual se resume a fazer a chamada de um arquivo gerado pelo programa MEF-3D.

Após os cálculos, ele insere dentro deste mesmo arquivo valores dos potenciais nos nós, dos campos e induções calculadas. Estes dados guardados em arquivo serão tratados pelo programa GEF-3D.

4.4. O Programa GEF-3D

Um dos problemas que devem ser tratados dentro de um sistema informático que se destina a fazer a concepção e análise de dispositivos eletromagnéticos, é o relativo a visualização dos resultados obtidos. Este problema torna-se mais significativo quando do estudo de estruturas tridimensionais.

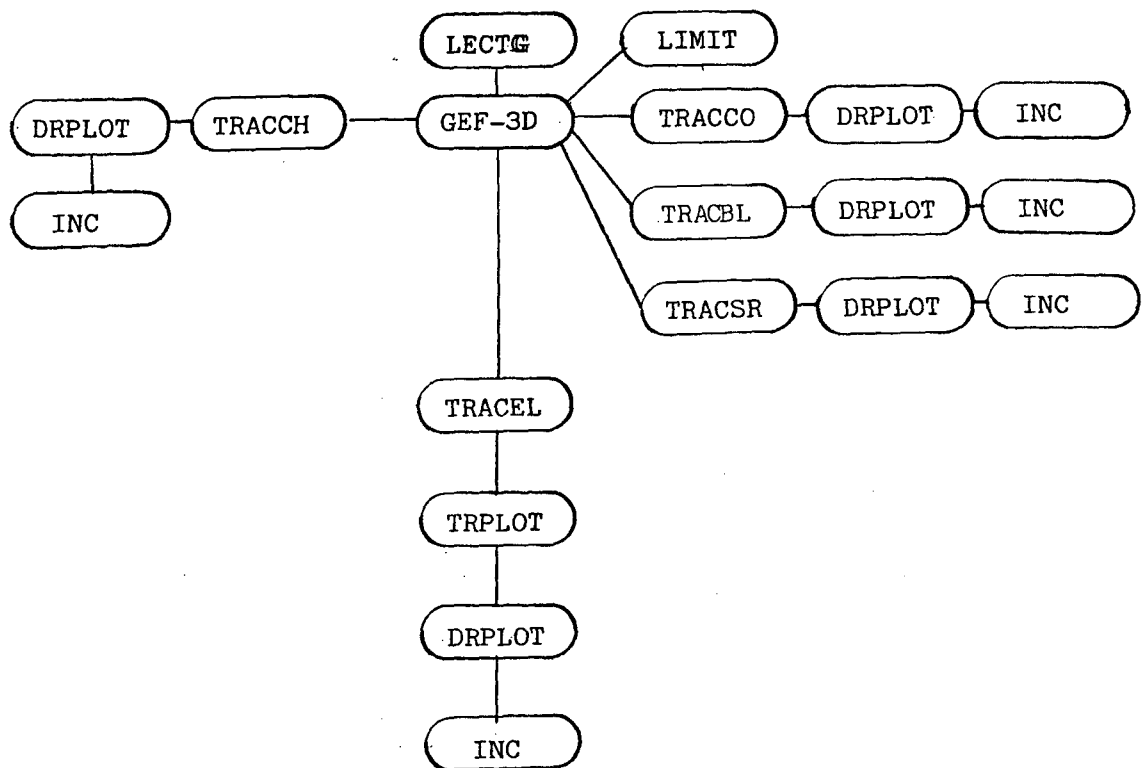
É necessário então que tenhamos saídas gráficas e numéricas que nos ajudem a efetuar a análise dos resultados.

No programa GEF-3D, podemos inicialmente obter uma tabela com resultados numéricos obtidos do cálculo do programa CEF-3D. Temos ainda saídas gráficas, (em console, impressora e/ou plotter), que nos fornecem diversos tipos de traçado da estrutura, ou seja:

- . contorno do domínio
- . bloco dos materiais
- . elementos da malha
- . dos vetores de indução nos elementos dos materiais solicitados.

Fundamental em um problema 3D, é também a possibilidade de visualizarmos a estrutura, em vários ângulos de observação. O programa GEF-3D permite que o domínio possa sofrer rotações em torno dos eixos Ox e Oz , o que nos fornece grande ajuda na compreensão da distribuição de campos na estrutura.

A árvore principal do programa é a seguinte:



As subrotinas de tratamento de dados do programa GEF-3D são as seguintes:

- Subrotina LECTG - Leitura dos dados em disco.
- Subrotina LIMIT - Pesquisa dos limites do desenho.
- Subrotina TRACCO - Traçado do Contorno.
- Subrotina TRACBL - Traçado dos Blocos dos Elementos.
- Subrotina TRACSR - Traçado das Subregiões.
- Subrotina TRACEL - Traçado dos Elementos.
- Subrotina TRACCH - Traçado dos Campos.
- Subrotina DRPLOT - Traçado de Segmentos de Reta.
- Subrotina INC - Traçado mais denso.
- Subrotina TRPLOT - Traçado dos elementos hexaédricos.

4.5. Exemplos de utilização do sistema SCAD-3D

O objetivo deste parágrafo é mostrar alguns exemplos de

cálculos de campos elétricos e magnéticos, utilizando o sistema SCAD-3D, demonstrando a importância desse sistema na análise e concepção de estruturas eletromagnéticas.

4.5.1. Determinação de campos elétricos no interior de um auto-transformador de 200 MVA [8]

No presente trabalho, é feita a análise da distribuição de campos elétricos em um auto-transformador de 200MVA, pertencente ao sistema de transmissão da ELETROSUL. Houve duas ocorrências similares envolvendo equipamentos deste tipo, nas quais ocorreram curto-circuito interno nas unidades, o que praticamente ocasionou a destruição das mesmas. Entre as várias hipóteses de causa de acidente, havia uma relativa à distribuição anormal de campo elétrico no transformador. Neste trabalho, apresentamos o estudo de cálculo de campos, utilizando o método de elementos finitos que trouxe uma resposta precisa a esta questão. Verificou-se, pelo menos, que não havia anormalidade na distribuição de campos elétricos.

4.5.1.1. Introdução

Na composição do sistema de transmissão de energia elétrica da ELETROSUL, há um grande número de transformadores de alta potência distribuídos na região de concessão da companhia, que abrangem os estados de RS, SC, PR e MS. Entre os diferentes tipos de transformadores utilizados, nos interessaremos em particular, neste trabalho, pelos transformadores com as características abaixo:

- potência: 200 MVA
- classe de tensão: 500kV
- monofásico

- relações de tensões: 525/ $\sqrt{3}$; 230/ $\sqrt{3}$; 13.8kV
- tipo construtivo: shell

Em fevereiro de 1985 e em junho de 1985, duas unidades com estas características sofreram falhas severas, envolvendo os enrolamentos de 500/ $\sqrt{3}$ kV e o de 13,8 kV, bem como outros pontos do transformador. As ocorrências foram de tal monta, que levaram ao incêndio e perda praticamente total do equipamento. Tendo em vista que a ELETROSUL possui várias unidades semelhantes, pertencentes ao mesmo lote de fornecimento, pareceu-nos de grande prudência e importância que um estudo aprofundado sobre estas ocorrências fosse efetuado, sob pena de continuar ocorrendo falhas idênticas, caso o problema não fosse devidamente averiguado e solucionado.

4.5.1.2. Espectro de probabilidade das causas de falha

As duas ocorrências acima foram de grande similitude e tiveram como consequências materiais os efeitos abaixo relacionados:

- bucha de A.T. (Alta Tensão) destruída
- deformação generalizada do tanque
- vazamento de 10.000 litros de óleo isolante mineral, devido à ruptura do tanque
- explosão do pára-raios de 13.8 kV
- quebra do comutador em vazio
- deformação do enrolamento de 500/ $\sqrt{3}$ e conexões

Após a primeira ocorrência, as equipes técnicas da ELETROSUL procuraram levantar as características da mesma, e não se observou nenhuma evidência clara e imediata de causa de falha. Tendo em vista isto, foram levantadas algumas hipóteses como causas prováveis:

- a) problema com malha de transmissão da ELETROSUL;
- b) problema com o projeto do autotransformador - distribuição anormal de campos elétricos e distâncias de isolamento subdimensionadas;
- c) problema com o óleo mineral isolante;
- d) problema com montagem do equipamento;
- e) defeitos de fabricação;
- f) eletrização estática do óleo.

Neste trabalho, descreveremos os estudos efetuados pelo GRUCEM (Grupo de Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos) da UFSC, que visam a análise do item b acima relacionado.

4.5.1.3. Definição da Região de Estudos

Na figura 1 temos um desenho esquemático do autotransformador. A configuração utilizada não respeita exatamente a distribuição dimensional real dos enrolamentos do equipamento, mas fornece, contudo, uma imagem esquemática para entendimento da região de domínio de cálculo.

As regiões são separadas por colunas de papelão isolante. Na zona posterior aos enrolamentos, temos também uma coluna de papelão, bem como na zona anterior, que foi omitida no desenho.

A tensão diminui das espinas centrais para as situadas na extremidade, de forma que temos uma tensão de $313/\sqrt{3}$ kV na espira justaposta à coluna de papelão. A saída de B.T. (13,8 kV) é feita pelos cabos mostrados na figura.

Um comutador a vazio (CAV) fica situado acima do enrolamento de A.T. de tal forma que a projeção de seu ponto central fica no meio da espira de $500/\sqrt{3}$ kV. O CAV, no momento da ocorrência estava a uma tensão de $205/\sqrt{3}$ kV.

Figura 2

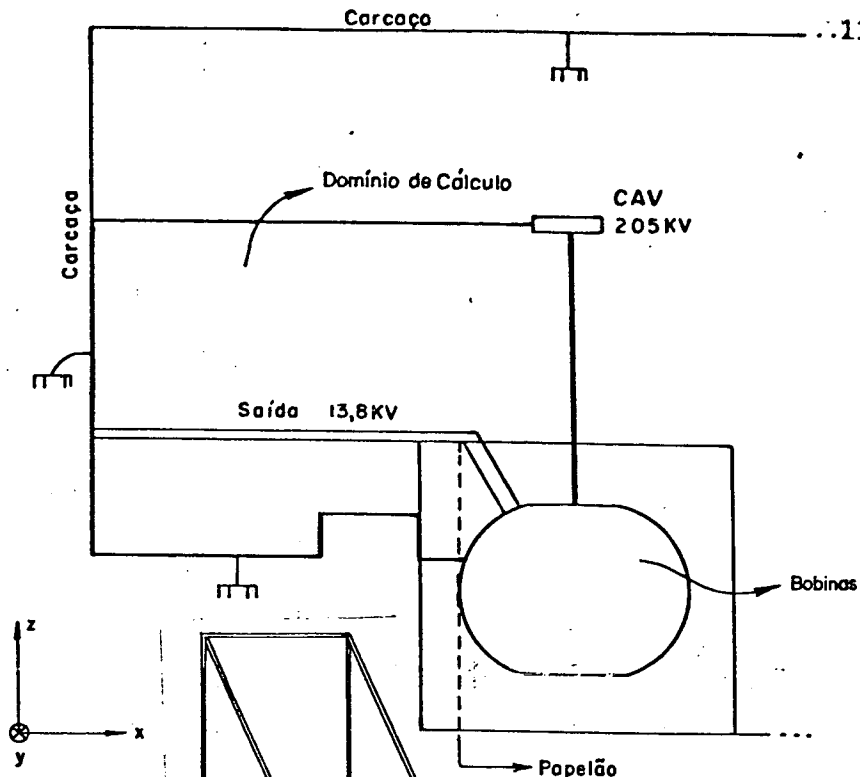
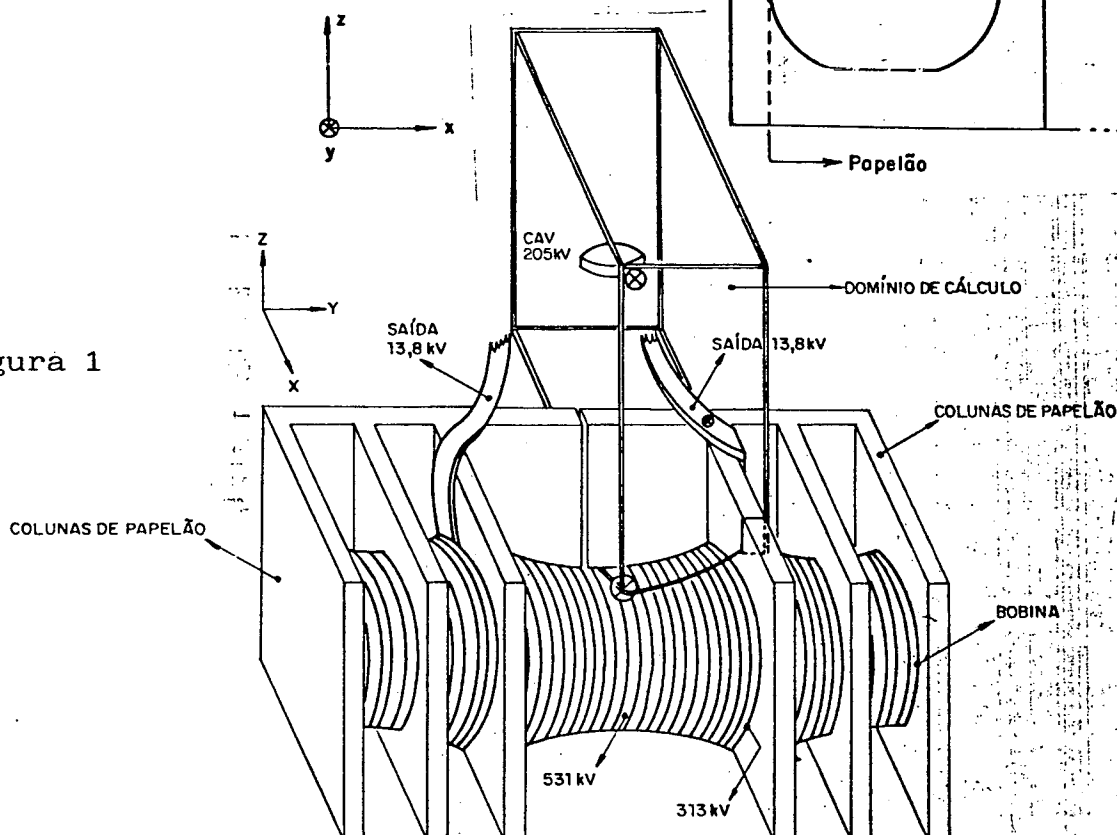


Figura 1



Examinemos a figura 2, onde temos uma vista lateral dos enrolamentos. Por esta figura notamos que na zona posterior temos a presença da carcaça do transformador. Os tres pontos de percussão do arco elétrico formado na ocorrência são mostrados na figura 1 por "X".

Ao efetuarmos uma análise preliminar do problema, e com base nos valores de tensão conhecidos, pudemos isolar uma região de estudo sobre a qual foi efetuado o cálculo de campos por elementos finitos. Esta região de estudo está mostrada na figura 1 e na figura 2. As condições de contorno são basicamente os potenciais

conhecidos nas superfícies que delimitam o volume da região de estudo.

4.5.1.4. A equação descritiva dos fenômenos físicos

A equação de Maxwell relativa a difusão do campo elétrico é, assumindo que não haja cargas elétricas no domínio de cálculo.

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

onde \vec{D} é a indução elétrica

Definindo um potencial escalar elétrico V , do qual deriva o campo elétrico \vec{E} por $\vec{E} = -\text{grad } V$, temos:

$$\text{div } \vec{D} = \text{div } \epsilon \vec{E} = \text{div } \epsilon (-\text{grad } V) = 0$$

Que, sob forma explícita é

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \frac{\partial V}{\partial z} =$$

Esta equação é conhecida como equação de Laplace e ela descreve a difusão do campo elétrico \vec{E} através do potencial escalar V .

4.5.1.5. O sistema informático SCAD-3D

O sistema SCAD-3D é um conjunto de programas destinado a solucionar problemas de cálculo de campos elétricos ou magnéticos tridimensionais usando o potencial escalar. Ele está implantado em um micro-computador de 16 bits compatível com IBM-PC, é conversacional e utiliza as possibilidades gráficas deste tipo de computador. Ao primeiro programa, fornecemos a estrutura, que é devida -

Obs.: O elemento utilizado é o hexaédrico a 8 nós.

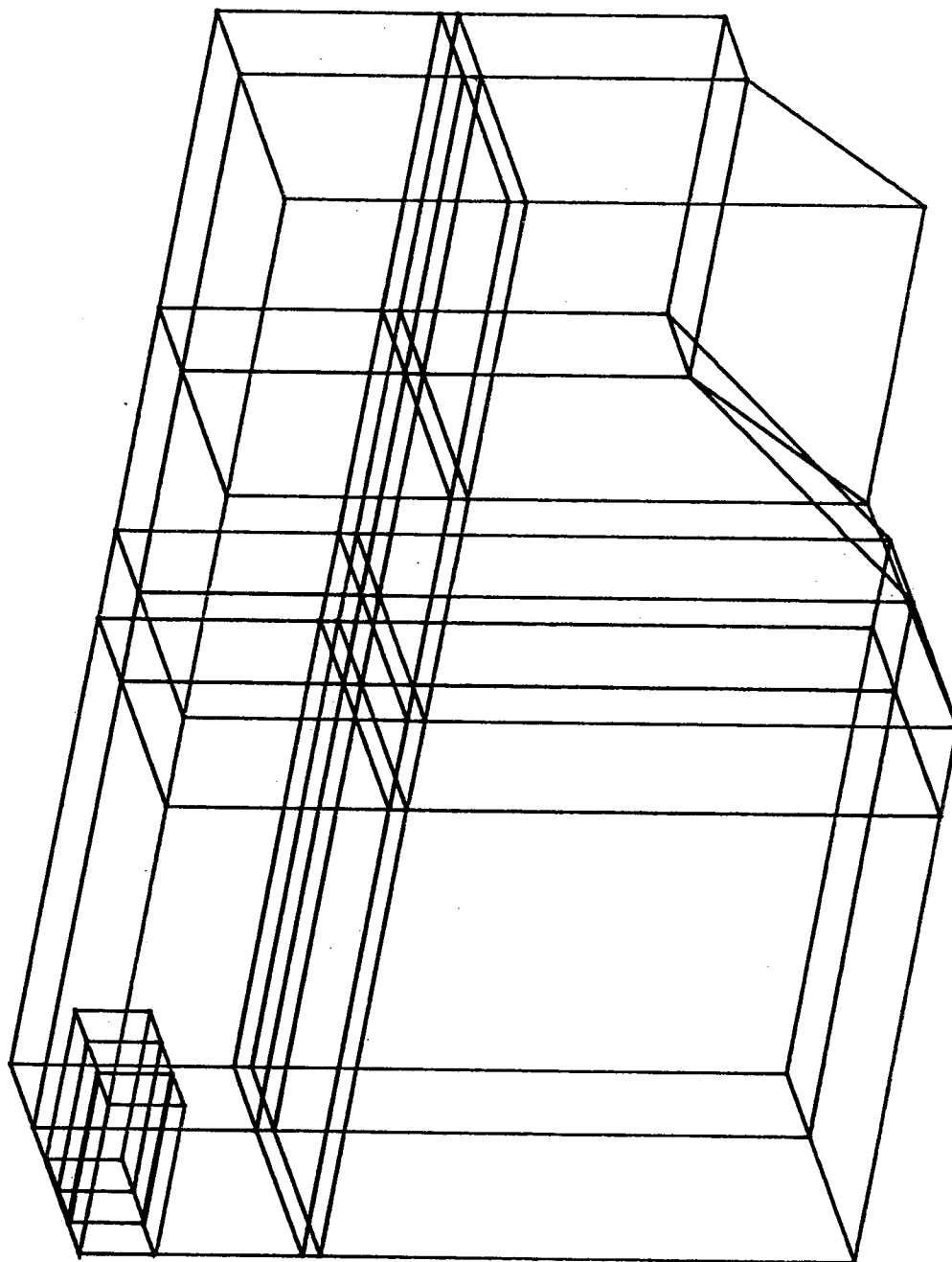


Figura 2.a - Subregiões e malha (Parte)

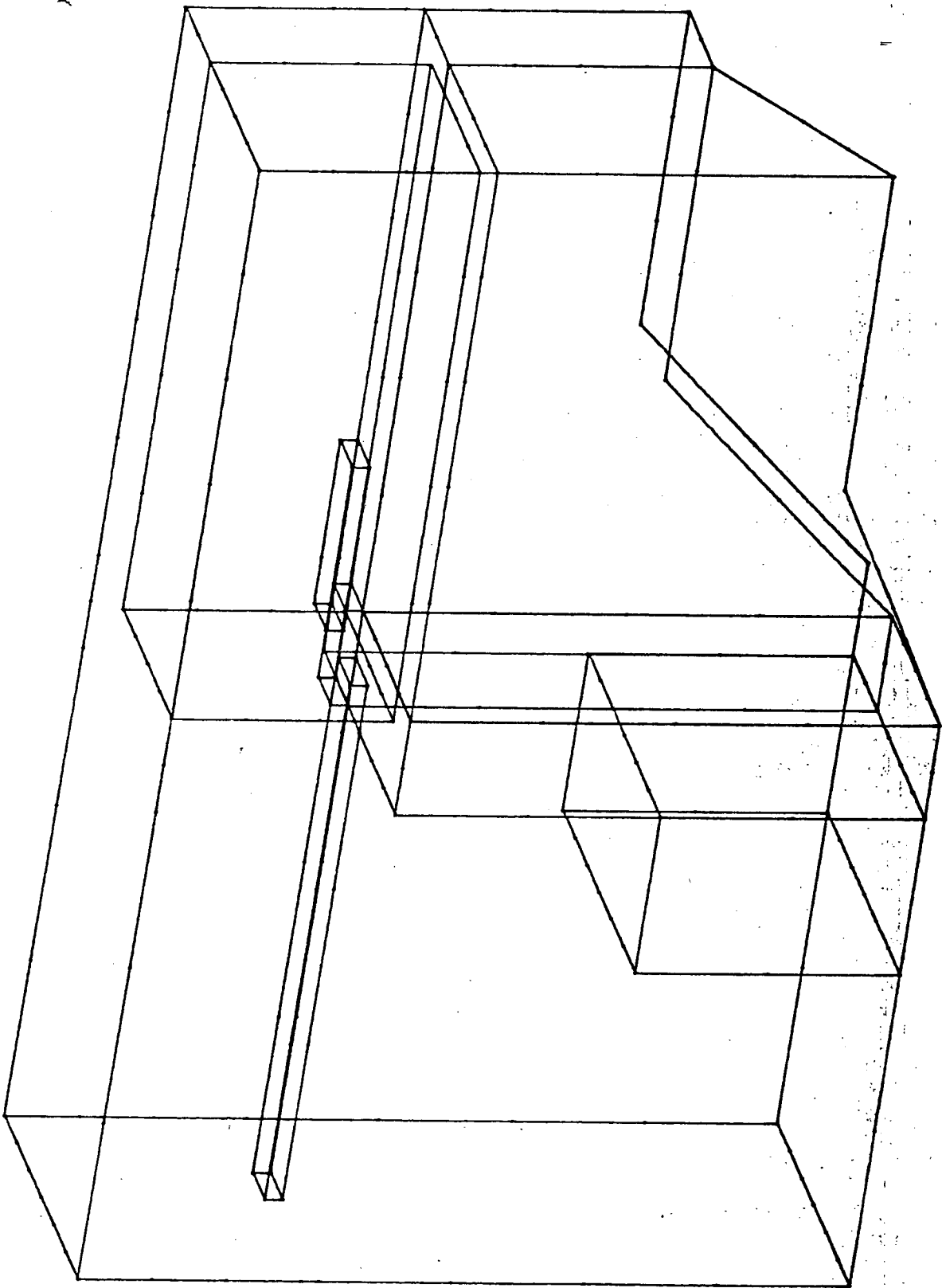


Figura 3

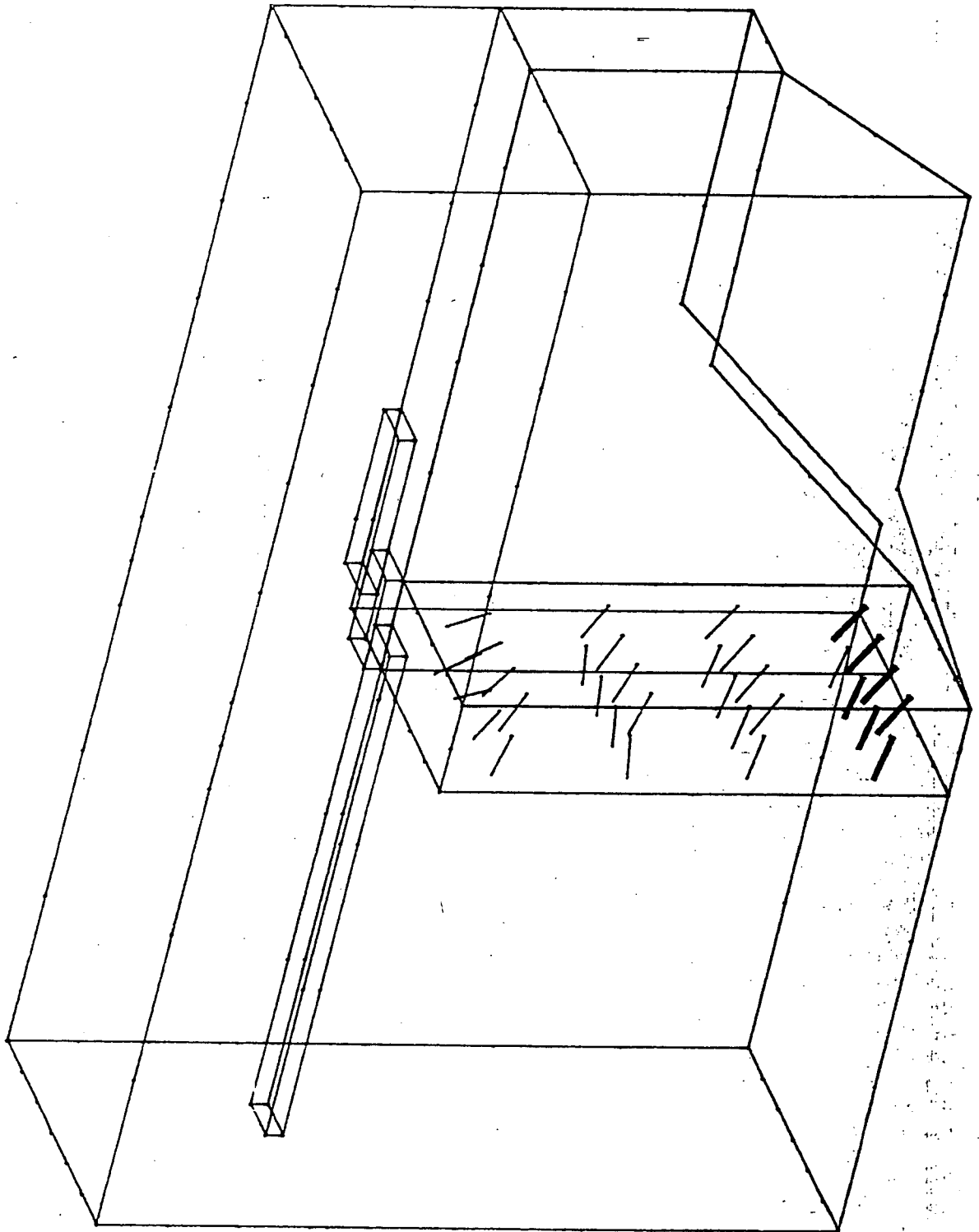


Figura 4

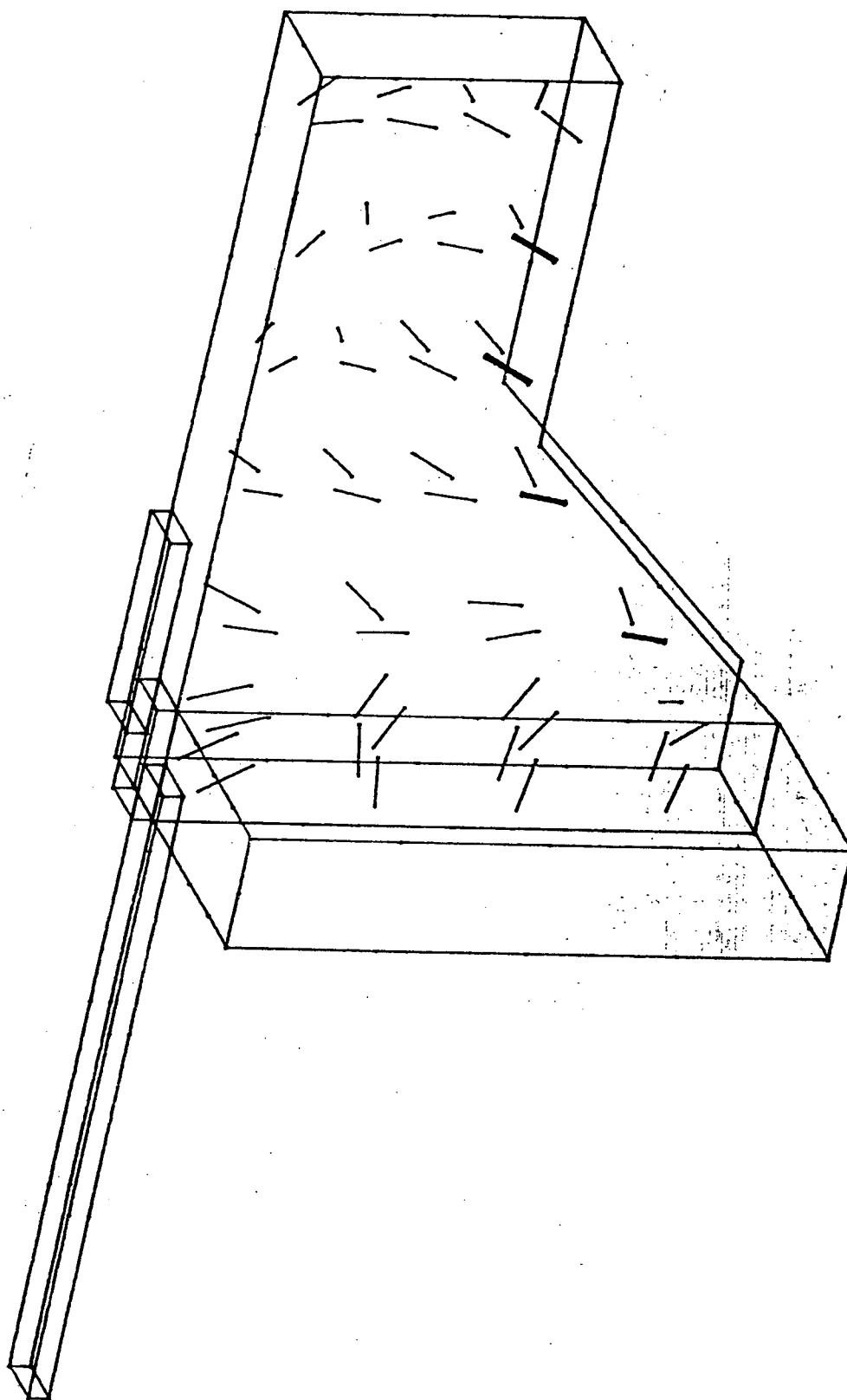


Figura 5

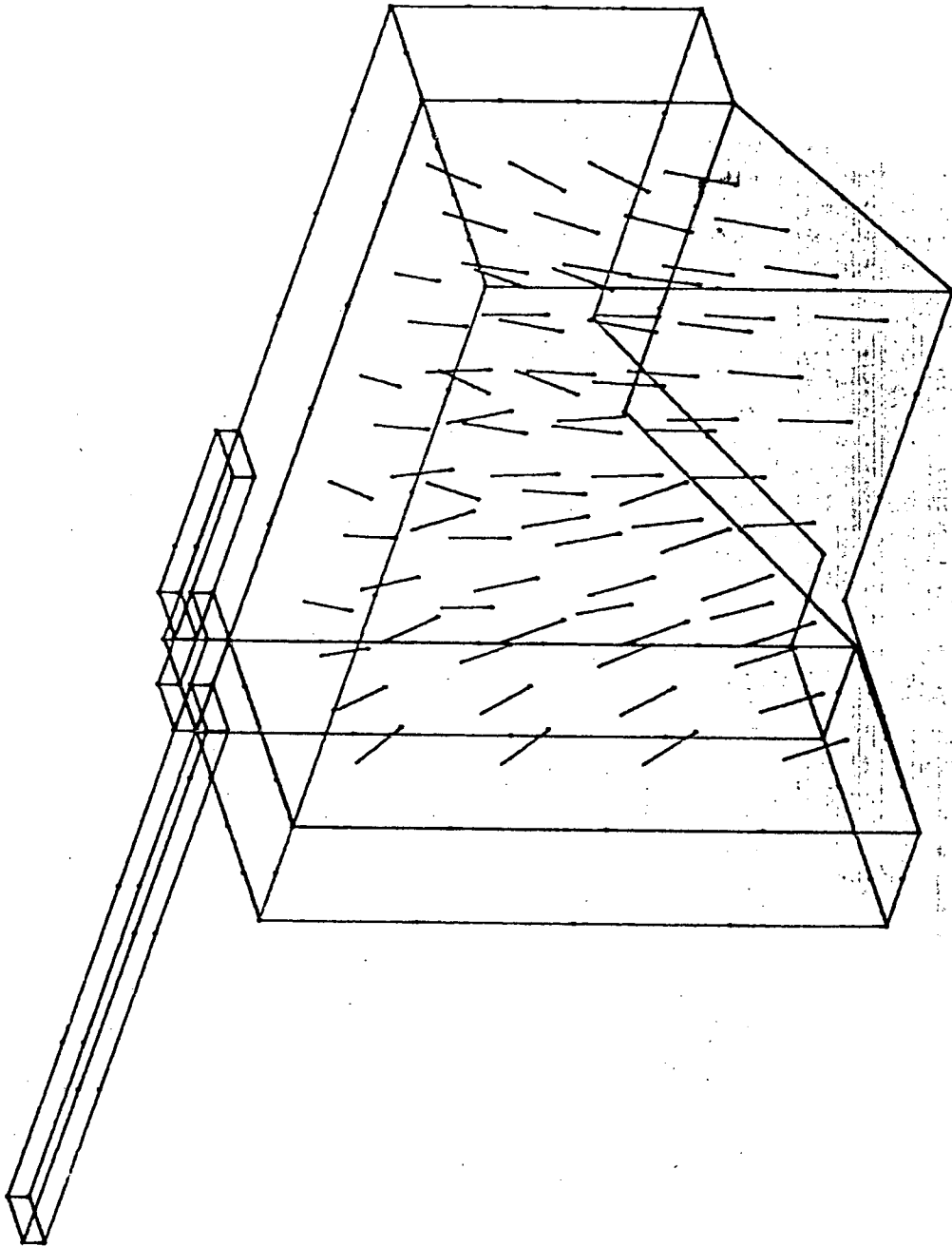


Figura 6

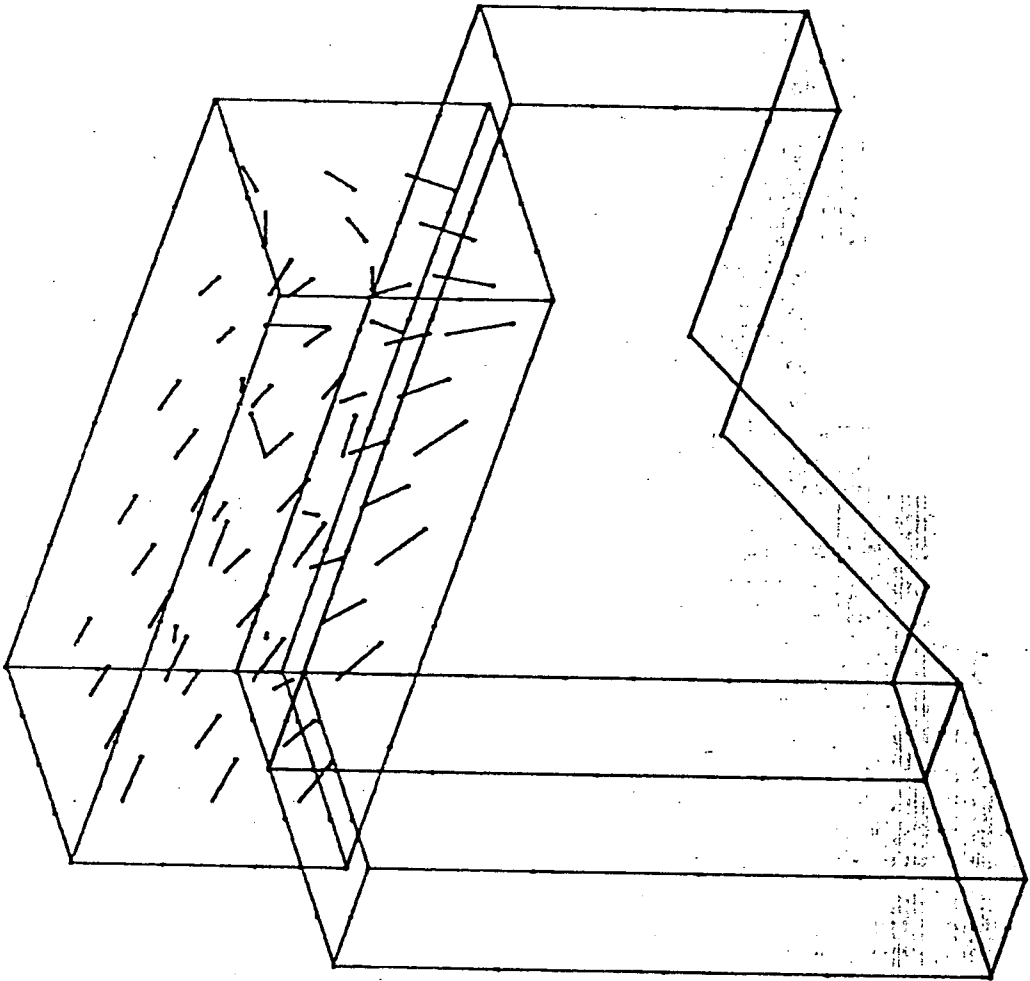


Figura 7

mente discretizada em elementos de topologia hexaédrica o que é necessário para a aplicação do método utilizado. O segundo módulo efetua o cálculo baseado no método matemático descrito no Cap.2. Para aplicá-lo, os elementos de topologia cúbica são automaticamente gerados um a um. Finalmente, o terceiro módulo nos fornece os resultados numéricos em todos os elementos do domínio e efetua também um tratamento gráfico, onde os campos são indicados nas diferentes partes do domínio. A espessura do traço é proporcional ao módulo do campo. Para uma melhor facilidade de visualização, é dada a possibilidade de se fazer rotações no espaço do domínio. Os gráficos obtidos podem ser traçados em um plotter.

4.5.1.6. Os resultados obtidos do cálculo

Na figura 3, identificamos o conjunto das diferentes sub-regiões que compõem o nosso domínio de cálculo, já descrito no parágrafo 4.5.1.3.

As dimensões das mesmas foram obtidas dentro do próprio transformador.

As figuras 4 e 5 nos fornecem o campo nas zonas contendo as colunas de papelão. Podemos então observar a direção do mesmo e notamos também onde ele é mais intenso. Na figura 6, é plotado o campo na zona justaposta as espiras de A.T., e na figura 7, temos o campo elétrico na zona próxima ao CAV.

Dos resultados numéricos, podemos obter a informação mais importante para a análise proposta por este estudo. O campo mais intenso está situado nas colunas de papelão e ele não excede 30 KV/cm, valor situado muito baixo da rigidez dielétrica do material.

Na zona de A.T., onde houve a percursão de um dos arcos elétricos, o campo é de aproximadamente 18 KV/cm, que é também bas

tante inferior a rigidez dielétrica de óleo mineral, que é de 200 KV/cm.

Foi então descartada a hipótese segundo a qual o arco elétrico seria provocado por um valor excessivo de campo elétrico gerado dentro do transformador, em funcionamento normal.

4.5.1.7. Conclusão

Na sequência da análise das hipóteses aventadas e citadas no parágrafo 4.5.1.2, após profundos estudos, testes e medições, conclui-se que as falhas foram causadas por dois fatores:

- blindagem insuficiente nos terminais do comutador em vazio
- fenômeno de eletrização do óleo isolante mineral devido ao atrito criado pelo movimento do mesmo com as partes estáticas do equipamento

Citemos que, baseado nesse diagnóstico, foi reforçada a blindagem do CAV e procurou-se minimizar a tendência de eletrização do óleo isolante, não só nas unidades novas, como nos transformadores deste tipo já em funcionamento.

Como resultado prático das providências recomendadas, observamos que as unidades já recuperadas apresentaram resposta satisfatória às alterações procedidas.

O sistema de cálculo tridimensional de campos elétricos por elementos finitos implementado na UFSC forneceu uma resposta precisa quanto à questão concernente ao campo elétrico na zona acidentada do auto-transformador e descartou a hipótese segundo a qual a distribuição de campo seria anormal. Cabe salientar neste projeto a integração frutífera entre universidade e empresa, pela utilização racional de tecnologias avançadas disponíveis na universidade.

4.5.2. Estudo de um servo-motor com imãs-permanentes por um método de elemento finitos [9]

O cálculo realizado no artigo referenciado, foi realizado, por um outro método de cálculo de campos utilizando a técnica de elementos finitos.

Utilizamos este exemplo de utilização para efetuarmos uma comparação entre o método desenvolvido no artigo e o nosso método; os resultados obtidos, são semelhantes, como podemos verificar pelas figuras desta sessão.

Neste trabalho nós analisamos a viabilidade de construção de servo-motor à imãs permanentes de concepção original. As partes rotórica e estatórica do mesmo são justapostas axialmente, obtendo-se assim uma máquina com baixa inércia, indicada para aplicações em robótica. Um estudo foi necessário para avaliar se o fluxo magnético gerado no rotor pelos imãs concatena a bobina indutora, produzindo assim o torque mecânico. Para tal estudo, foi implementado um sistema de cálculo de campos magnéticos tridimensionais. Este sistema computacional é baseado no método variacional por elemento finitos, é conversacional e possui saídas gráficas. Como resultado deste estudo, constatamos que a maior parte do fluxo criado pelos imãs realmente é eficaz. No texto completo apresentaremos resultados numéricos e gráficos, que mostram que esta máquina é de construção totalmente viável.

4.5.2.1. Introdução

Neste artigo, faremos o estudo preliminar de uma máquina possuindo imãs permanentes. É indispensável, antes de construí-la, avaliar sua capacidade de gerar torque motor. Para realizarmos este estudo, implementamos um sistema computacional de cálculo de campo magnético em 3 dimensões, utilizando a técnica de elementos

finitos, que possibilita a determinação do fluxo magnético atravessando a bobina indutora, o que significa analisar o funcionamento desta máquina como gerador. Neste artigo será descrito o esquema de funcionamento da máquina, o método numérico utilizado e os resultados obtidos.

4.5.2.2. Descrição da Máquina

Nas figuras 1a e 1b temos esquematicamente a estrutura da máquina em questão.

Na sua parte estática temos a bobina indutora, cujas espiras são colocadas em volta de um anel cilíndrico de ferro.

De um dos lados da bobina são colocados pares de ferro. O primeiro (1) é justaposto a parte superior da bobina, enquanto que o outro (2) dirige-se ao anel cilíndrico colocado no interior da bobina. Estas barras de ferro formam, então, de um dos lados da bobina, um volume de forma aproximadamente cilíndrica, onde será colocado o rotor.

O rotor é constituído por um conjunto de ímãs cuja imantação é dirigida radialmente. As polaridades são sucessivamente invertidas, de tal maneira que temos tantos pares de ímãs quanto de barras de ferro.

A parte interior do rotor é constituída de um anel de ferro. Um caminho de fluxo é mostrado nas figuras 1a e 1b.

O torque motor é obtido alimentando-se a bobina indutora através de um conversor estático.

4.5.2.3. A Modelização da Máquina

Neste estudo, supomos que a máquina possui 4 pares de ímãs com os 4 pares respectivos de barras de ferro (fig.1a). O passo po

lar é de $1/3$, ou seja, no nível de entreferro nós temos $2/3$ de superfície em face dos imãs e barras.

Para avaliar o fluxo máximo, supomos os imãs em face das barras de ferro. Por uma questão de simetria, podemos estudar apenas meio par de polos.

Notemos que:

- com relação as condições de contorno, consideramos que em todas as superfícies temos condições de Neumann, ou seja, consideramos que o fluxo magnético não atravessa as mesmas, o que constitui uma aproximação bastante próxima da realidade no caso desta máquina.
- as dimensões de ferro são tais que o fluxo atravessa sempre aproximadamente a mesma secção, o que evitaria uma saturação excessiva em regiões particulares da máquina.

4.5.2.4. Resultados Obtidos

Para o cálculo, foi tomado imãs cuja imantação remanente é de 0,4 Tesla.

Tendo em vista a homotetia neste tipo de cálculo, as dimensões da máquina não têm influência nenhuma sobre os resultados procurados, que são:

- a indução de trabalho do imã
- a relação entre o fluxo criado pelo imã e o fluxo atravessando a bobina.

Quanto ao primeiro resultado, notamos que o imã trabalha com $B \approx 0,38T$, o que significa que a relutância média do circuito magnético é de valor baixo. Sobre o segundo resultado, a relação de fluxo útil por fluxo criado é de 0,88.

Notemos que para verificar a precisão dos resultados pode-se calcular o fluxo em diferentes partes do circuito. No nosso caso, notamos que houve uma diferença de aproximadamente 13% entre o fluxo calculado no entreferro e o fluxo atravessando a bobina. Um exame profundo sobre esta questão nos mostrou que esta diferença é devida a limitação do número de nós, que se mostrou necessária, tendo em vista que sistemas tridimensionais geram matrizes de ordem elevada. Assinalamos que esta diferença de 13% não afeta os resultados globais do estudo.

O resultado gráfico é de difícil compreensão; preferimos então apresentar o mesmo em duas figuras obtidas diretamente do nosso sistema computacional. São as figuras 4.a e 4.b onde temos o traçado das induções magnéticas nas partes rotóricas e estática. Os traços vistos nas mesmas indicam a direção do campo na estrutura e a intensidade da densidade de fluxo B , e que é indicada pela espessura do traço.

4.5.2.5. Conclusão

O estudo realizado mostra que a máquina que desejamos construir é totalmente viável. Notamos que 88% do fluxo criado pelos imãs atravessa a bobina indutora o que é plenamente satisfatório. Porém, cabe salientar que esta relação pode diminuir um pouco quando a máquina for construída, pois o circuito magnético, sendo formado por várias partes distintas, terá micro-entreferros nas suas junções. Porém, nós estimamos que a percentagem de fluxo útil será ainda bastante elevada.

Para efetuarmos este estudo, foi implementado um sistema computacional de campo tridimensional baseado no método de elementos finitos. A utilização do mesmo, sendo gráfico-conversacional é bastante prática, e os resultados obtidos, mesmo em problemas de

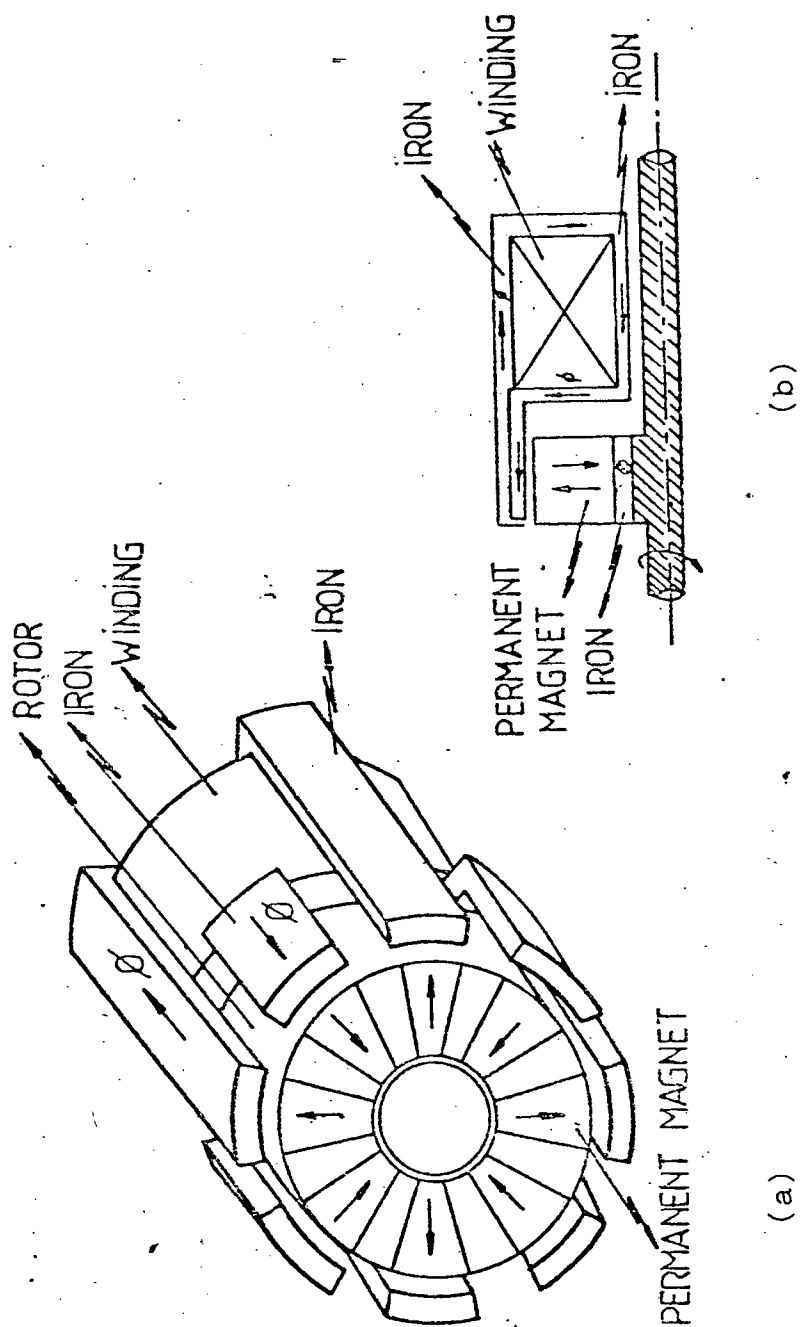


Figura 1: Estrutura do servomotor

geometria complexa como o descrito acima, são bastante precisos.

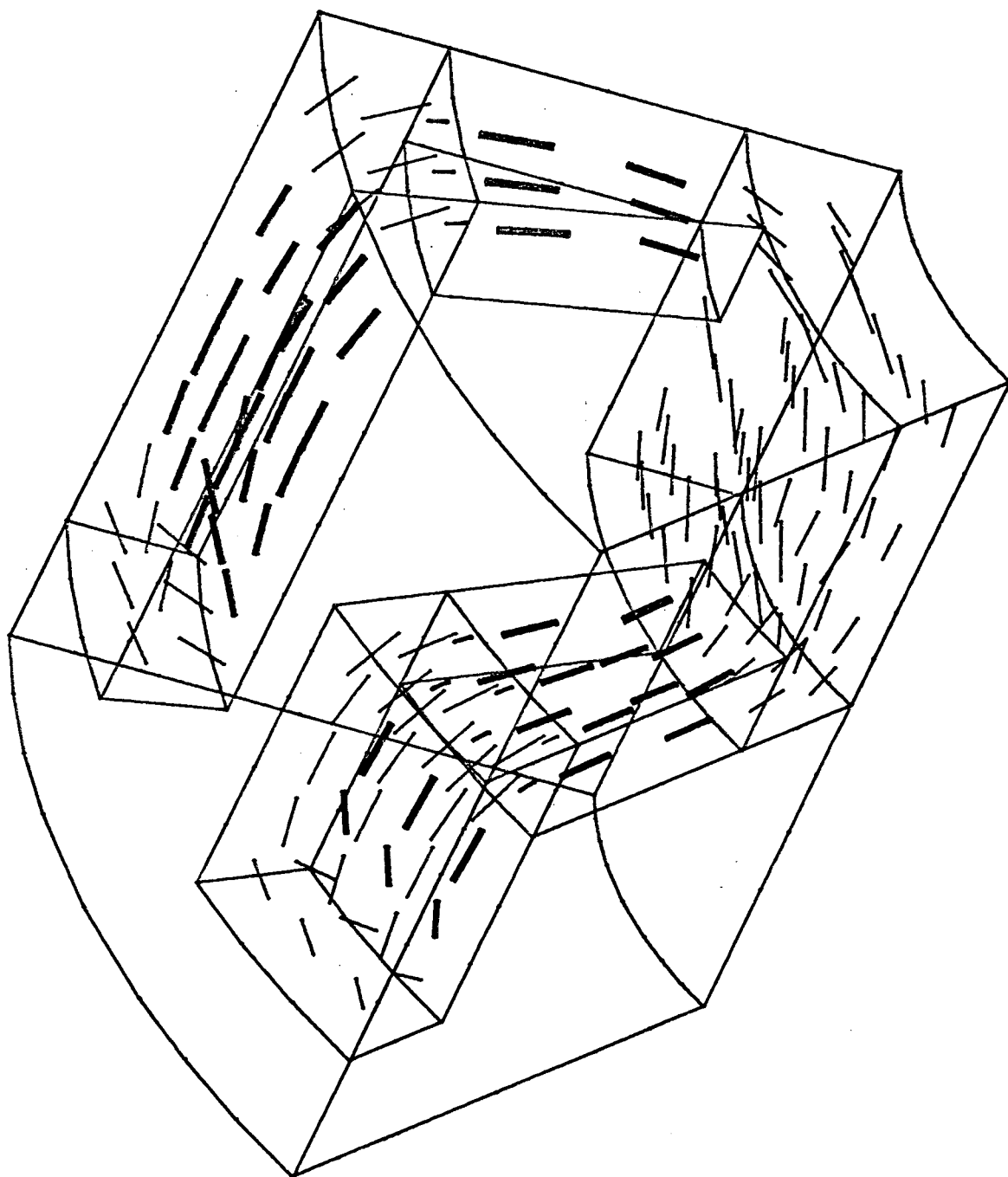


Figura 4.a - Distribuição da indução magnética no esta -
tor do motor

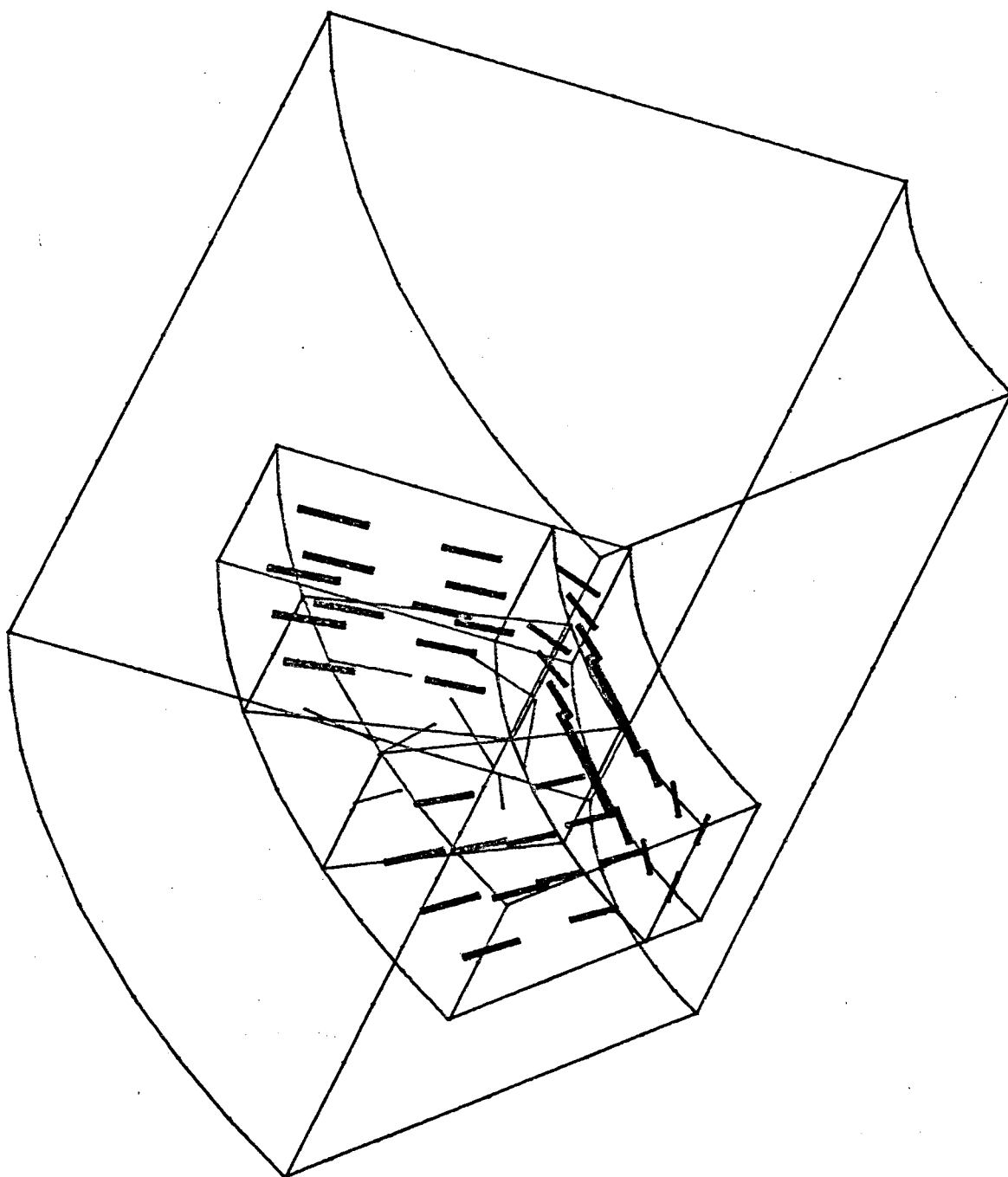


Figura 4.b - Distribuição da indução magnética no rotor do motor

4.5.2.6. Figuras do Sistema SCAD-3D

Apresentaremos a seguir as figuras do resultado do cálculo no sistema SCAD-3D.

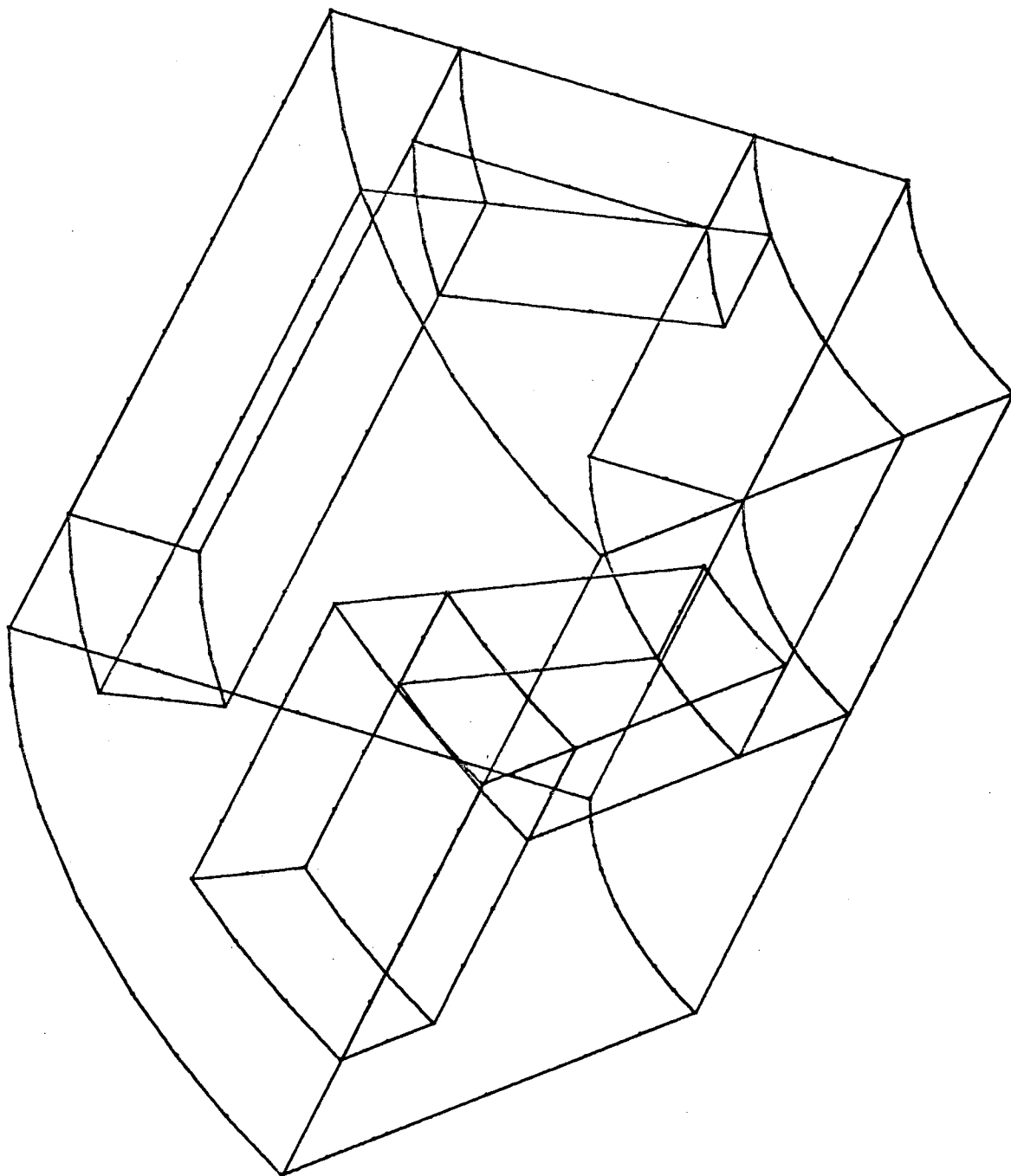


Figura 4.8 - Estator do Servomotor

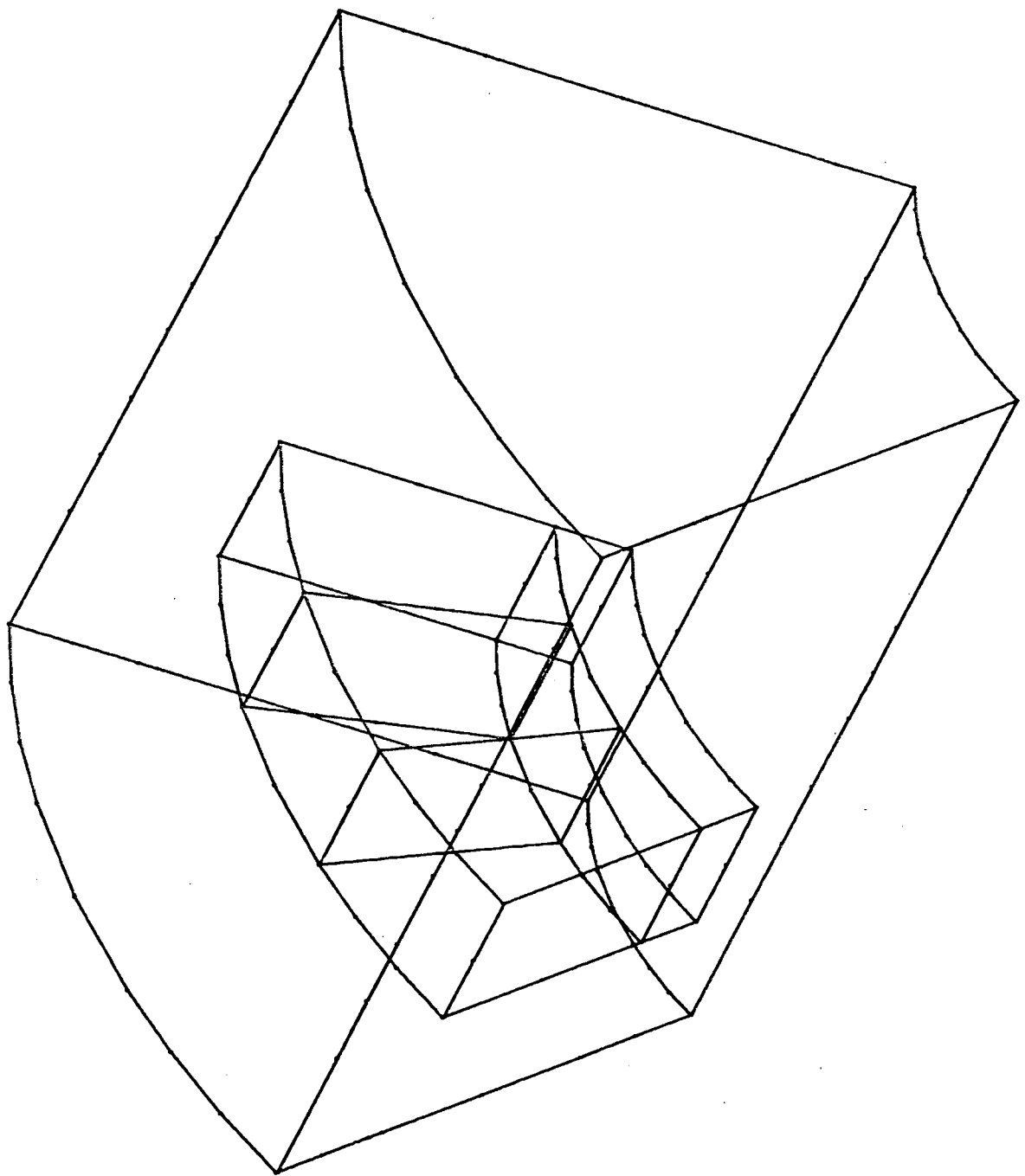


Figura 4.9 - Rotor do Servomotor

Obs.: O elemento utilizado é o hexaédrico a 8 nós.

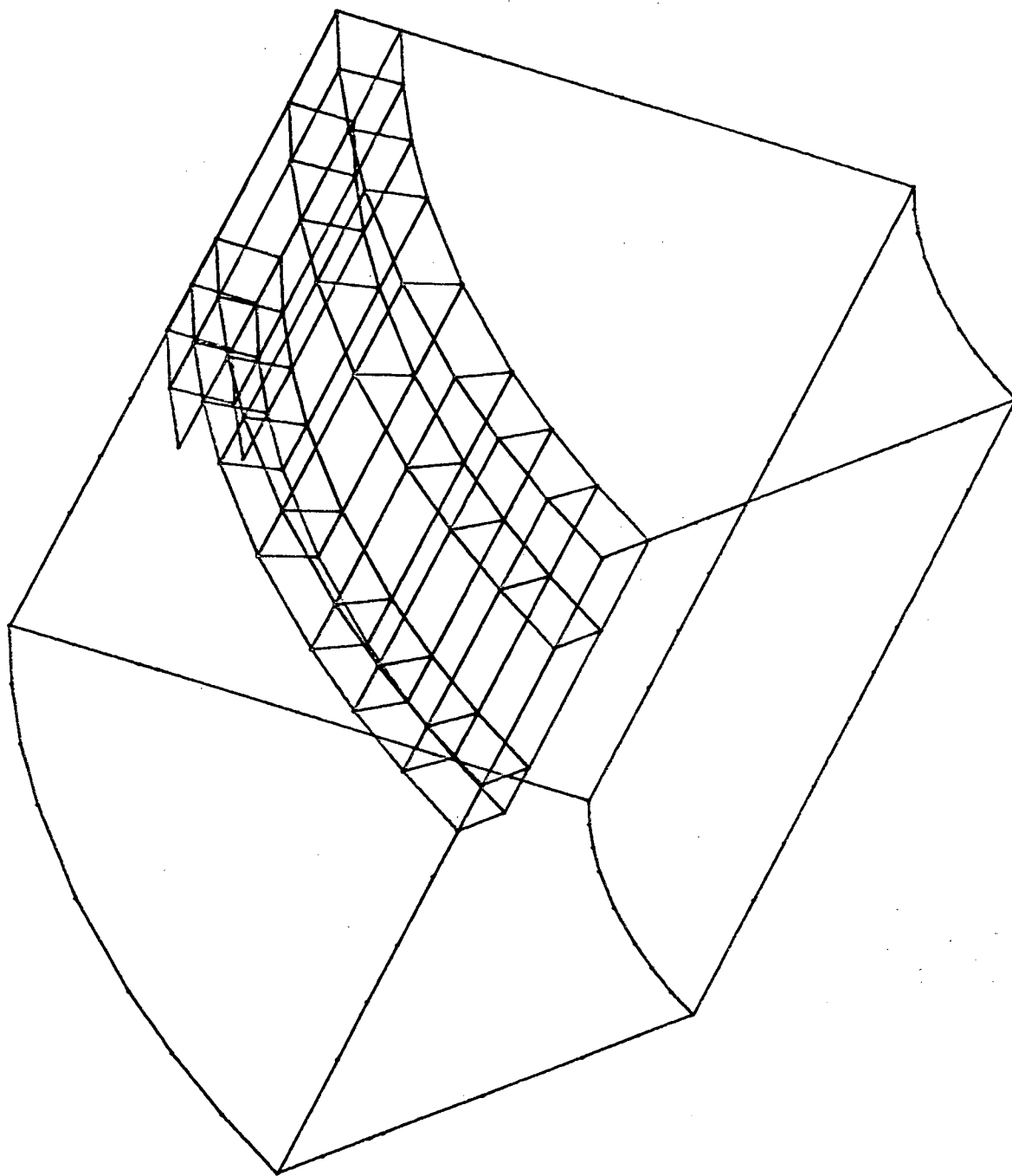


Figura 4.10 - Malha gerada pelo sistema SCAD-3D(Parte)

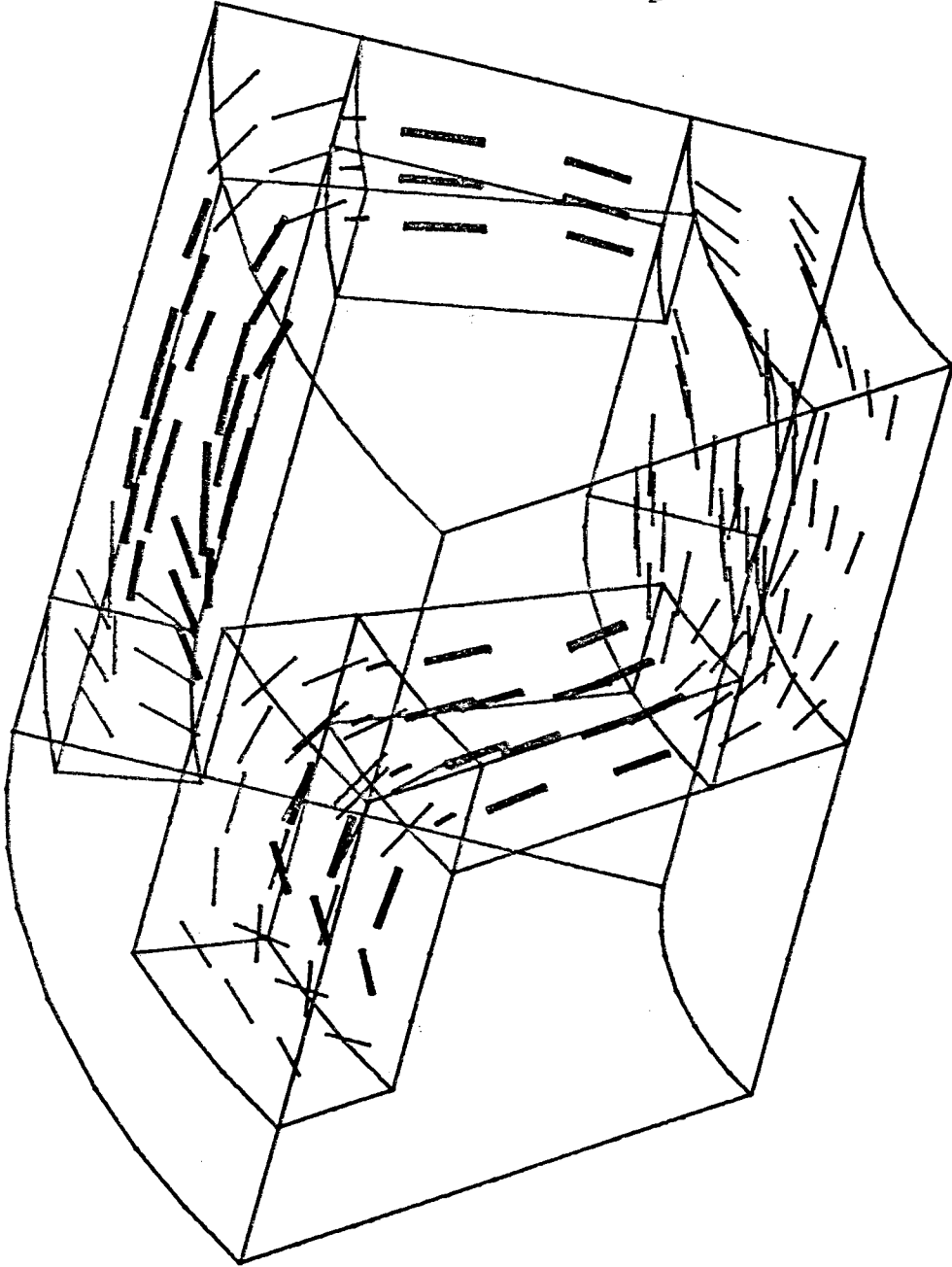


Figura 4.11- Distribuição de indução no estator

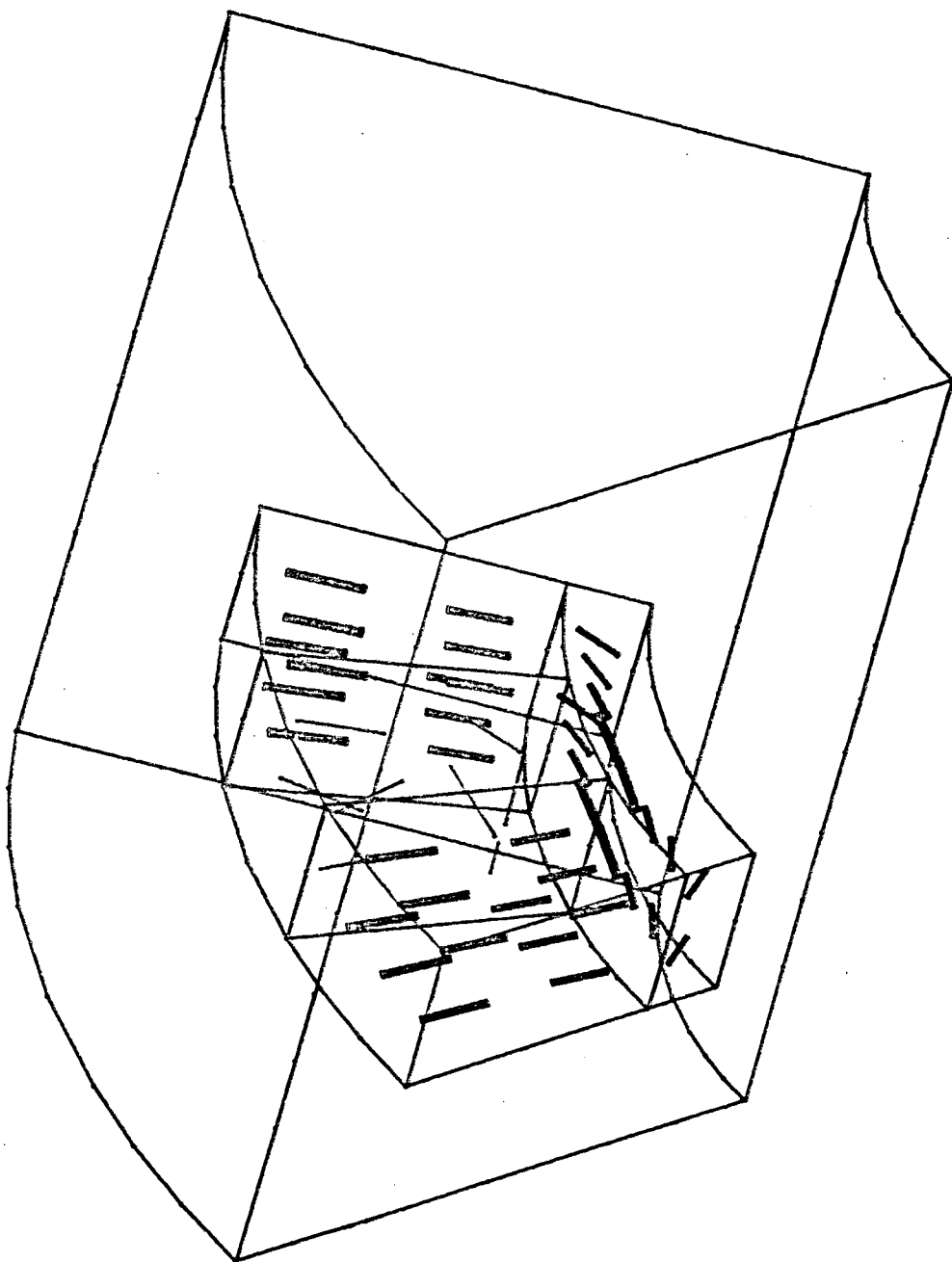


Figura 4.12- Distribuição de indução no rotor

4.5.3. Estrutura Hipotética

O exemplo colocado abaixo é hipotético, e serve apenas para ilustrar, a versatilidade do sistema SCAD.

A - Domínio de Estudo

Neste exemplo supomos que temos 2 peças ferromagnéticas dispostas como na figura abaixo, onde aplicamos uma diferença de potencial nas extremidades.

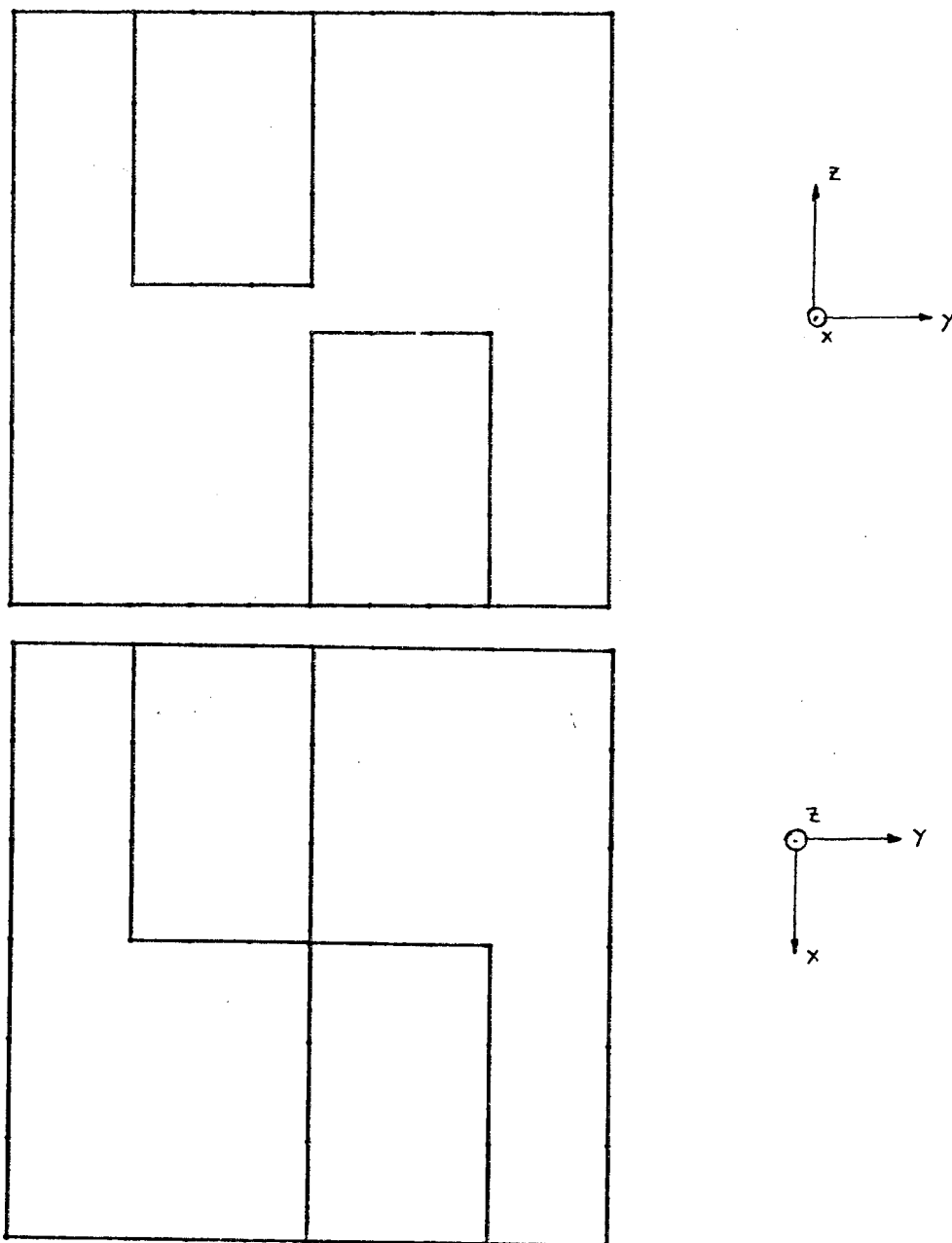


Figura 4.13- Domínio de Estudo da Estrutura Hipotética

B - Estrutura no sistema SCAD-3D

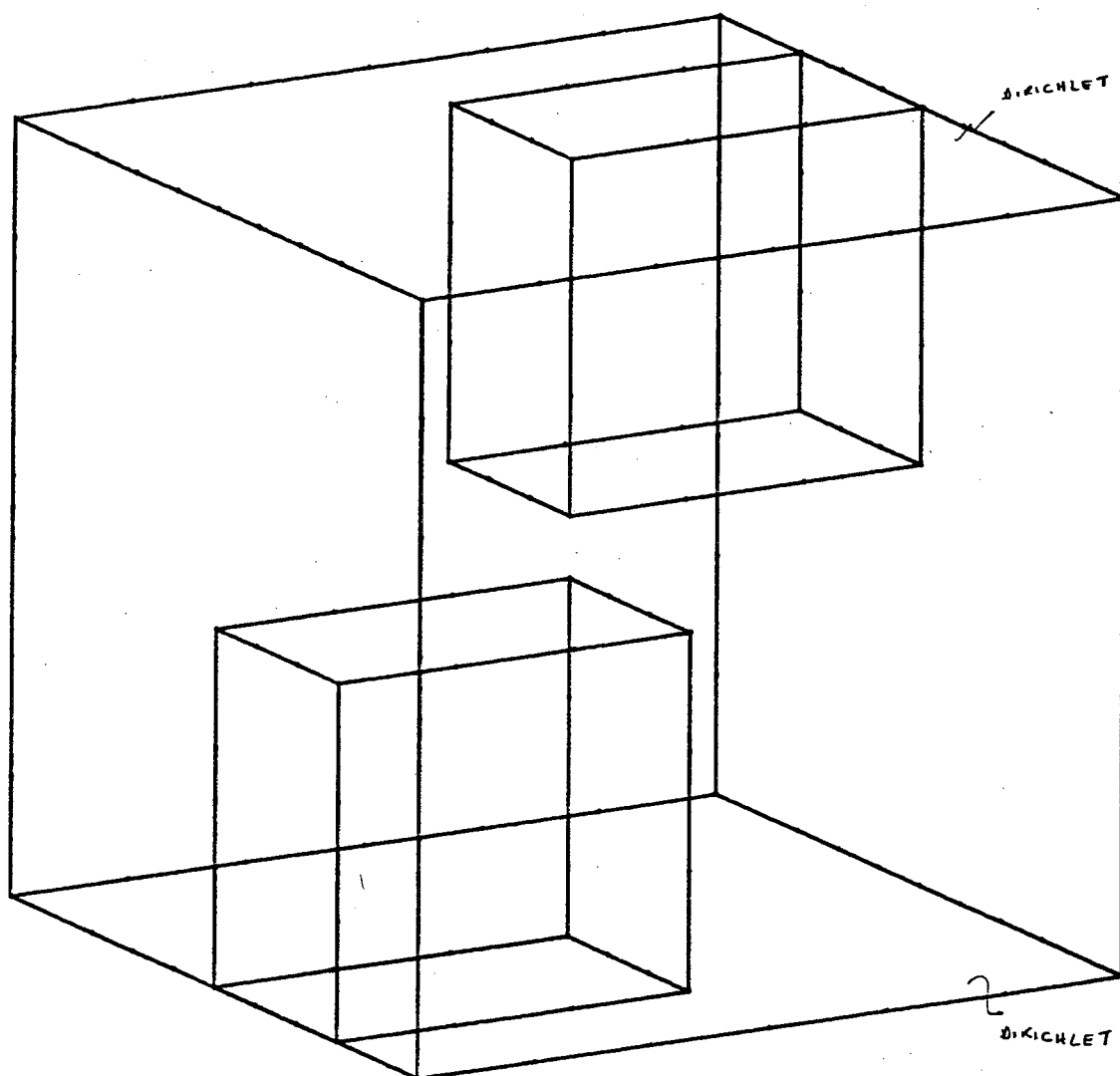


Figura 4.14 - Contorno da estrutura

C - Malha Gerada (Parte)

Obs.: O elemento utilizado é o hexaédrico a 8 nós.

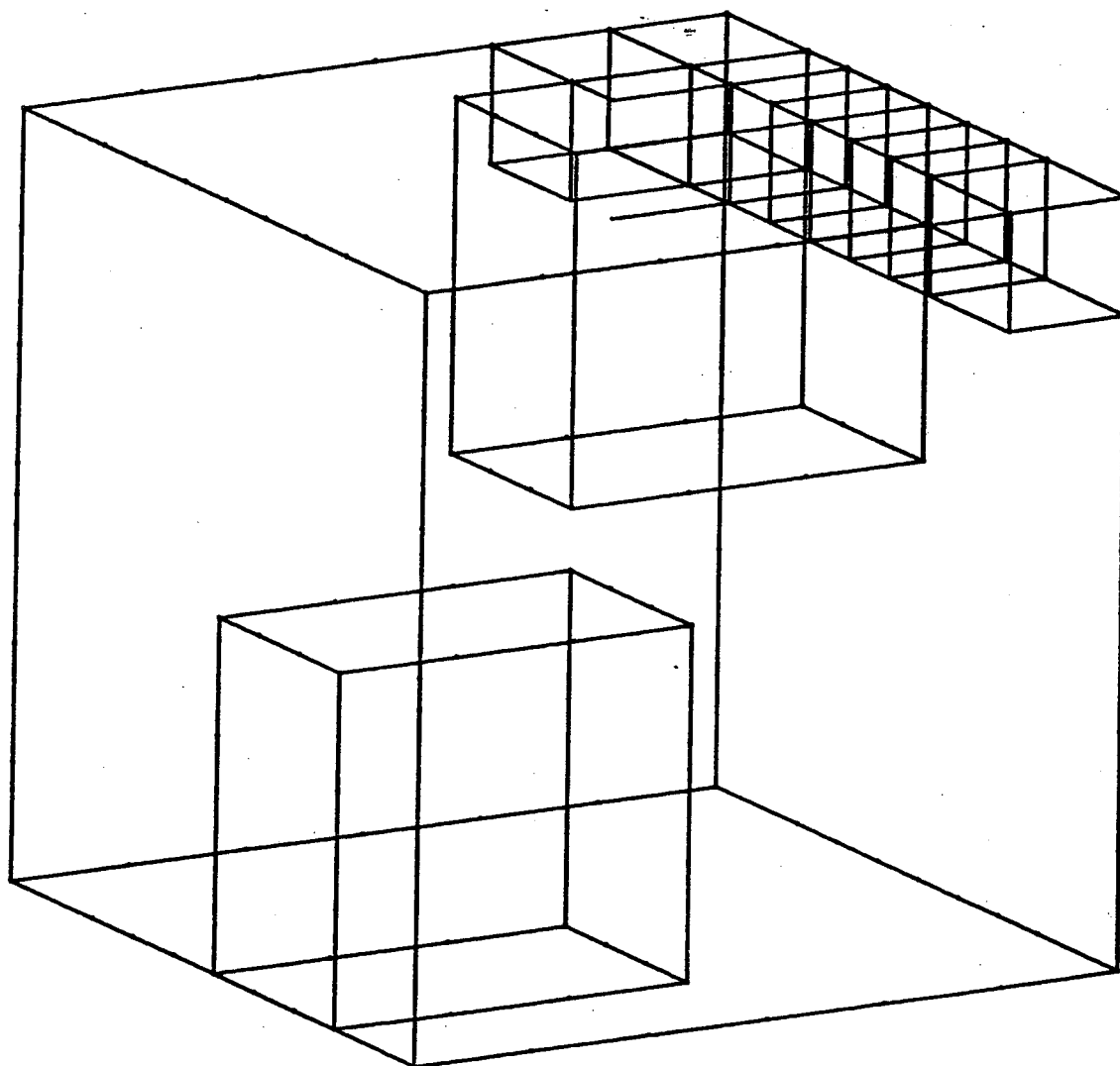


Figura 4.15- Malha gerada pelo sistema SCAD-3D

D - Induções Magnéticas

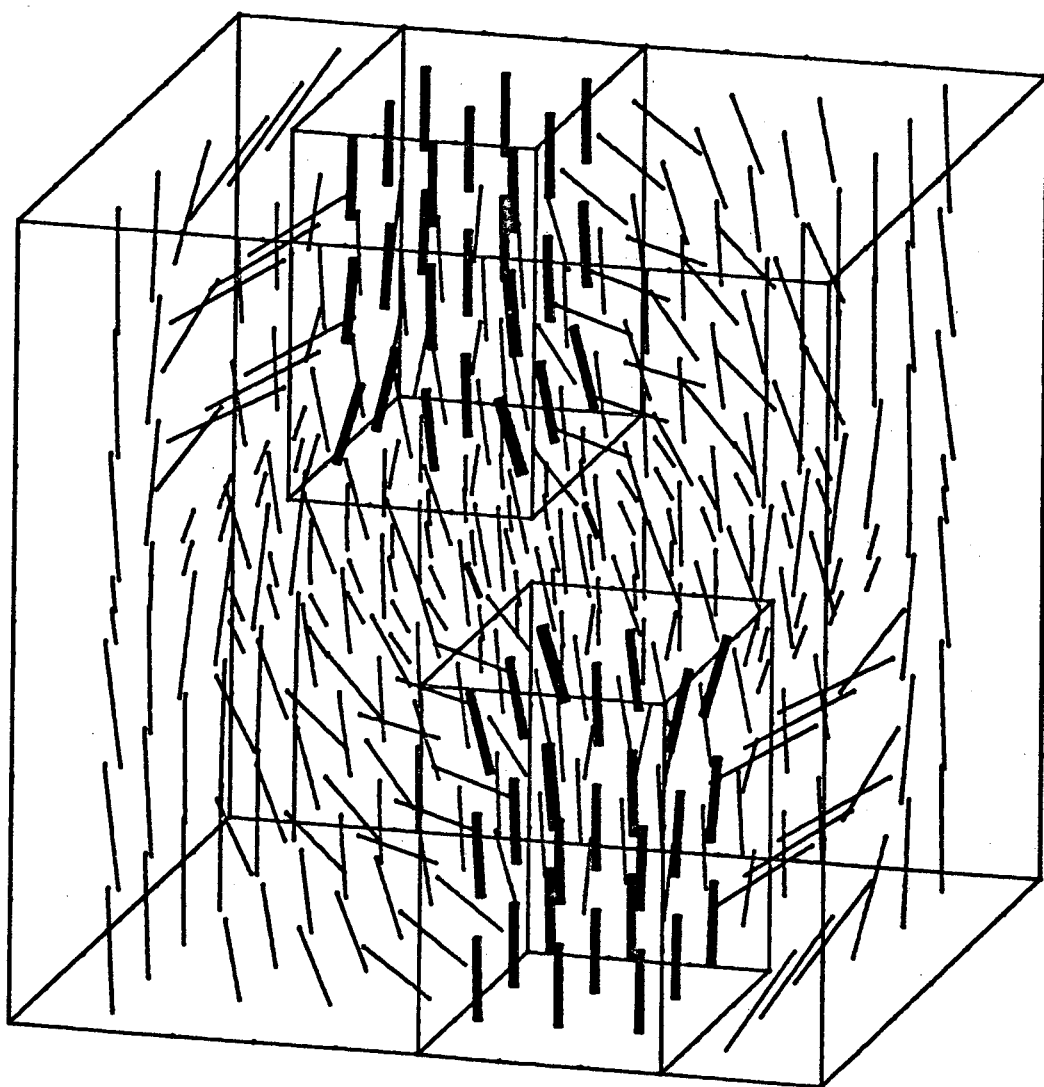


Figura 4.16 Resultado do cálculo das induções magnéticas
do sistema SCAD-3D

Podemos visualizar, nas figuras anteriores, que as induções magnéticas tem a distribuição esperada.

4.6. Conclusões

O sistema SCAD-3D visa fazer a análise e concepção de dispositivos eletromagnéticos, em 3 dimensões.

O sistema foi desenvolvido totalmente em FORTRAN-77, e pode ser adaptado em qualquer micro-computador de 16 bits, compatível ao IBM-PC.

Na sua versão atual podemos resolver problemas lineares, eletrostáticos, magnetostáticos e magnetostáticos com imãs-permanentes.

CONCLUSÃO GERAL

Ao concluir-mos este trabalho, cabe salientar que os objetivos principais a serem cumpridos foram os abaixo citados :

- Aprofundamento teórico da utilização da técnica de elementos finitos, aplicada aos diversos ramos da engenharia.
- A implementação e análise de diferentes técnicas de resolução iterativa dos sistemas de equações lineares gerados pelo método de elementos finitos.
- O melhoramento informático do sistema de cálculo de campos tridimensional , já existente.

Quanto ao primeiro item, ao longo dos capítulos 1 e 2 , descrevemos minuciosamente a aplicação da técnica de elementos finitos nos problemas por nós tratados. Inicialmente, a formulação variacional é aplicada aos casos eletrostáticos e magnetostáticos que desejamos equacionar. É feita a aplicação deste tratamento teórico ao problema discretizado em elementos finitos isoparamétricos tridimensionais a oito nós. Finalmente explicitamos a técnica de integração numérica, necessária para a formação do sistema matricial que nos leva a solução do problema.

Quanto ao segundo item, relembramos que os métodos iterativos propiciam uma melhor utilização de memória.

Tivemos a oportunidade de notar que os métodos mais modernos, como o ICCG, apresentam na maior parte dos casos convergências rápidas e que portanto, sua utilização é válida. No entanto, para certos tipos de problemas, como por exemplo casos onde a maior parte do contorno do domínio aplica-se a condição de Neumann , ou em máquinas elétricas que possuem um pequeno entreferro, nenhum método iterativo apresentou convergência, o que, de uma certa maneira, diminui em parte o interesse pelos mesmos. Em vistas deste resultado é interessante possuir-se dois programas de cálculo, apenas diferindo no armazenamento e resolução do sistema ma

tricial . O primeiro utilizando um método iterativo e o segundo utilizando um método direto. A aplicação de um ou de outro seria definida pela natureza do problema a ser tratado, sabendo que quando utilizado o primeiro citado, poderíamos resolver problemas com um domínio de cálculo maior, tendo em vista a economia de memória que lhe é associada.

Quanto ao último item, foi feito um esforço no sentido de tornar o sistema SCAD-3D, o mais operacional possível. Sabe-se que a utilização de sistemas tridimensionais, é sempre, por sua própria natureza, muito delicada. Para amenizar este aspecto, procuramos melhorar a entrada conversacional de dados, bem como a saída gráfico-numérica já existente. Como resultado, a geração da malha é semi-automática e os resultados gráficos facilitam a compreensão do fenômeno eletromagnético.

Acreditamos que o sistema SCAD-3D é na sua versão atual perfeitamente utilizável por um engenheiro projetista.

Como conclusão final, estimamos que o trabalho desenvolvido foi extremamente válido, pois ao término do mesmo, dominamos outras técnicas de elementos finitos, estudamos e implementamos métodos iterativos de resolução de sistemas matriciais, e como resultado possuímos um sistema de cálculo de campos tridimensionais perfeitamente operacional e apto a ser estendido a outros problemas eletromagnéticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1|- ASSUMPÇÃO BASTOS,J.P. (1984)." Calcul de champs magnétiques par une méthode d'éléments finis à 2 et 3 dimensions - contribution à la détermination des caractéristiques de machines à reluctance variable polydiscôides ". Tese de docteur d'Etat ès sciences - Mars 1984, Université Pierre et Marie Curie , Paris, France.
- | 2|- DHATT,G. & TOUZOT,G. (1984)." Une présentation de la méthode des éléments finis ". Deuxième Édition, Maloine S.A. Editeur, Paris, France.
- | 3|- SABONNADIÈRE ,J-C. & COULOMB,J-L.(1986)." Éléments finis et CAO". Premier édition, Editions Hermes, Paris,France.
- | 4|- STOER,J. & BULIRSCH,R. (1980)." Introduction to numerical a nalysis". Springer Verlag, New York , USA.
- | 5|- GOLUB,G.H. & MEURANT,G.A. (1983)." Résolution numérique des grands systèmes linéaires ".Collection de la Direction des Études et Recherches d'électricité de France,vol 49,premier édition, Editions Eyrolles ,Paris,France.
- | 6|- PAO,Y.C. (1980)." On triangular decomposition of non-positive definite symmetric matrices using complex fortran programing". Short communications ,Internacional Journal for Numerical methods in engineering,vol 15 ,pages 611-634,USA.
- | 7|- MEIJERINK,J.A. & VAN DER VORST,H.A. (1977)." An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix" . Mathematics of Computation, volume 31,number 137,pages 148-162 ,USA.
- | 8|- ASSUMPÇÃO BASTOS,J.P.,CARLSON,R.,RAIZER,A. & SCHNEIDER,L.C. (1987)."Determinação de campos elétricos no interior de um auto-transformador de 200 MVA por um método de elementos finitos tridimensional". Anais do 1º Simpósio Franco-Brasileiro sobre cálculo de campos elétricos e magnéticos, pags 312-325,Fpolis,Brasil

- | 9|- ASSUMPÇÃO BASTOS,J.P.,CARLSON,R.,LAJOIE-MAZENC,M. & DAVAT,B.
(1986)." Estudo de um servomotor com imãs permanentes por
um método de elementos finitos".Anais do 6º Congresso Bra-
sileiro de Automática,vol 1 ,pags 509-513, Belo Horizonte,
Brasil.
- |10|- ENDERLE,G.,KANSY,K. & PFAFF,G. (1984)."Computer Graphics
Programming, GKS- The Graphics Standard".First Edition,
Springer-Verlag ,New York,USA;